Batch PDF

Batch PDF

Algebra and Analytic Geometry

For 1-st Year Physical Science Students

By Ph.D Professor Doctor

Mounier Saied Morsee

Professor of Pure Mathematics and Geometry
in the Faculty of Science, Ain Shams University

Academic Year 1989

جبر وهندسة تحليلية

إعداد

ا.د. منير سيد مرسى
كلية العلوم

د. هدى محمد عبد الباسط
كلية البنات

جامعة عين شمس

George FAM Gabriel

$${}^{K}C_{r} + {}^{K}C_{r-1} = {}^{K+1}C_{r}$$

جبر

و

هندسة تحليلية

ALGEBRA

&

ANALYTIC

GEOMETRY

الباب الأول

الاستنتاج الرياضي

سنناقش في هذا الباب إحدى الخواص الهامة للأعداد الطبيعية والتي تستخدم لبرهنة العديد من القوانين الرياضية. ويطلق على هذه الخاصية اسم قانون الاستنتاج الرياضي. الذي ينص على ما يلي :

قانون الاستنتاج الرياضي :

إفرض أن $P(n)$ تقرير (أي جملة خبرية) حيث n عدد طبيعي. يكون التقرير $P(n)$ صحيحا لأي عدد طبيعي n إذا تحقق ما يلي :

١- $P(1)$ صحيحا.

ب- عندما يكون التقرير $P(n)$ صحيحا بالنسبة إلى $n=k$ فإنه يكون صحيحا بالنسبة إلى $n=k+1$.

من المفيد قبل أن نبين كيفية استعمال هذا القانون أن نذكر الطالب بأننا نقوم في "العلوم الطبيعية" بالتوصل إلى اكتشاف قوانين يفترض صحتها بشكل عام باستعمال ما يسمى "بالاستنتاج التجريبي" من عينات كثيرة. وتعتمد درجة اقتناعنا بهذا القانون على عدد المرات التي أخذت العينة أو أجريت التجربة وثبت صحته فيها. ومن الممكن أن يكون هذا النوع من الاستنتاج مقنع جدًا رغم أنه لا يحمل معه التأكد المنطقي "لبرهان رياضي". إن هذا هو "تعليل استقرائي للبرهان" وهو يحتاج إلى "تعليل استنباطي" لكي يصبح "قانونا منطقيا". وهنا يأتي دور الاستنتاج الرياضي الذي يستعمل "للتحقق المنطقي" من صحة نظرية معينة لعدد لا نهائي من الحالات.

وسنبين الآن كيفية استعمال هذا القانون للتوصل إلى نتائج رياضية. لنأخذ مجموعة الأعداد الطبيعية. إفرض أننا نريد معرفة كيفية التوصل

إلى إيجاد حاصل جمع أى عدد معين من الأعداد المتواليه دون إجراء عملية الجمع. لاحظ مايلى

$$1+2=\frac{2\cdot3}{2}=\frac{2(2+1)}{2}\;,\quad 1+2+3=\frac{3\cdot4}{2}=\frac{3(3+1)}{2}\;,$$
$$\therefore\ 1+2+3+4+5=\frac{5\cdot6}{2}=\frac{5(5+1)}{2}$$

من النتائج الأخيرة يمكن اجراء "التخمين المنطقى" بأن حاصل جمع أول أى "n" من الأعداد الطبيعيه المتواليه يساوى $n(n+1)/2$. لقد قمنا بمراقبه أربعة حالات أعطينا بعدها فرضيتنا هذه. إن طريقة "التعليل الاستقرائى" تتوقف عند هذه النقطة. ولكننا لا نعرف إذا كان استنتاجنا هذا صحيحا لأى عدد طبيعى "n". وهنا يأتى دور "التعليل الاستنباطى" لبرهنة أو "دحض فرضيتنا". ومع أن طريقة البرهان يطلق عليها برهان بواسطة الاستنتاج الرياضى إلا أنه فى الحقيقة برهان استنباطى بالكامل كما سنرى الآن:

البرهان بواسطة الاستنتاج الرياضى:

١- التقرير $f(n)$ هو: $f(n): 1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

ب- التقرير $f(1)$ صحيحا لأن:

$$L.H.S=1 \ \&\ R.H.S=\frac{1(1+1)}{2}=1 \Rightarrow L.H.S=R.H.S.$$

*ج- نفرض أن التقرير $f(n)$ صحيحا للعدد الطبيعى k. أى أن:

$f(k): 1+2+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ صحيحة

يجب أن نبرهن صحة:

$$f(k+1): 1+2+\dots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

الدليل:

$$1+2+\dots+k+(k+1)=\overbrace{\frac{k(k+1)}{2}}^{f(k)}+(k+1)$$
$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

* أى أن التقرير صحيح للعدد الطبيعى $k+1$

** د - إذن المقولة $f(n)$ صحيحة لأى عدد طبيعى "n" حسب قانون الاستنتاج الرياضى.

مثال(١): إذا كان n ; a,b أعداد طبيعية برهن أن:

$$(a.b)^n = a^n . b^n$$

الحل: ب - افرض أن التقرير $f(n)$ هو:

* $f(n): (a.b)^n = a^n . b^n$

ب: $f(1)$ صحيحة لأن:

$$\left.\begin{aligned} L.H.S &= (a.b)^1 = a.b \\ R.H.S. &= a^1.b^1 = a.b \end{aligned}\right] \Rightarrow L.H.S = R.H.S.$$

حـ - نفرض أن التقرير $f(n)$ صحيحا للعدد الطبيعى k. أى أن

* $f(k): (a.b)^k = a^k . b^k$ صحيحا

* يجب أن نبرهن صحة: $f(k+1): (a.b)^{k+1} = a^{k+1} . b^{k+1}$

البرهان: $(a.b)^{k+1} = (a.b)^k . (a.b) = (a^k . b^k)(a.b)$

$$= (a^k . a) . (b^k . b) = a^{k+1} . b^{k+1}$$

إذن $(a.b)^{k+1} = a^{k+1} . b^{k+1}$ وهذا يعنى أن $f(k+1)$ صحيحة.

د - إذن التقرير $f(n)$ صحيحا لأى عدد طبيعى "n" وذلك استنادا لقانون الاستنتاج الرياضى.

مثال(٢): إذا كان "n" عدد طبيعى برهن أن: $2^n \geq 1+n$.

الحل: أ - إفرض أن $f(n)$ هى المقولة: $f(n): 2^n \geq 1+n$

ب - $f(1)$ صحيحة لأن

$$\left.\begin{aligned} L.H.S &= 2^1 = 2 \\ R.H.S &= 1+1 = 2 \end{aligned}\right] \Rightarrow L.H.S \geq R.H.S.$$

حـ - إفرض أن $f(n)$ صحيحة لعدد معين k. يجب أن نبرهن أن $f(k+1)$ صحة $f(k+1): 2^{k+1} \geq 2+k$

بما أن التقرير $f(k)$ صحيح لعدد k فإن $2^k \geq 1+k$

بضرب جهتي هذه المتباينة في "2" نحصل على

$$2^{k+1} \geq 2+2k \geq 2+k \quad (\text{لأن } 2k \geq k)$$

فإن

$$2^{k+1} \geq 1+(1+k)$$

وهذا يعني أن التقرير $(k+1)$ P صحيحاً أيضاً .

ج - إذن التقرير (n) P صحيحاً لجميع الأعداد الطبيعية" وذلك استناداً لقانون الاستنتاج الرياضي .

تمارين: برهن باستعمال قانون الاستنتاج الرياضي صحة مايلي لجميع الأعداد الطبيعية n :

(1) $4+8+12+\cdots+4n = 2n(n+1)$

(2) $1^2+2^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

(3) $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(n(n+1)/2\right)^2$

(4) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(5) $2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-2$

* (6) $(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$ *

(7) $3+5+7+\cdots+(2n+1) = n(n+2)$

(8) $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2 = \frac{2n}{3}(n+1)(2n+1)$

(9) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots$ حدها $n = \frac{n}{2n+1}$ *

(10) $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots$ حدها n

$= n(n+3)/4(n+1)(n+2)$

رفع بواسطة الكتروني سعودية فاتورة الطوابق

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$i = \sqrt{-1}$

$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$

الباب الثاني
الأعداد المركبة

مقدمة:

كان السبب الذي حدا بالرياضيين إلى توسيع مجموعة الأعداد الطبيعية إلى الأعداد الصحيحة هو لتمكينهم من حل المعادلات التي على شكل

$x + b = a$ حيث a, b أعداد طبيعية.

إلا أن ذلك لم يكن كافيا لاستحالة إيجاد حلول في مجموعة الأعداد الصحيحة لجميع المعادلات التي تكون على شكل:

$a = bx$ ، حيث a, b أعداد صحيحة و $b \neq 0$.

لذلك جرى توسيع مجموعة الأعداد الصحيحة إلى مجموعة الأعداد النسبية. إلا أن المشكلة نفسها بقيت في مجموعة الأعداد النسبية لتعذر إيجاد حلول فيها للمعادلات التي تكون على شكل: $x^2 = 2$

لذلك فقد كوّنا مجموعة الأعداد الحقيقية. ولكن حتى بعد تكويننا لمجموعة الأعداد الحقيقية فإن مشكلة إيجاد حلول لجميع المعادلات بقيت معنا. خذ على سبيل المثال المعادلة:

$x^2 + 1 = 0$. إن حل هذه المعادلة هو $x = \pm\sqrt{-1}$

ولكن كما نعرف فإن $\sqrt{-1}$ ليس عددا حقيقيا. وهذا يعني أنه من غير الممكن إيجاد حل لهذه المعادلة في مجموعة الأعداد الحقيقية.

لذلك فإن علينا تكوين مجموعة جديدة من الأعداد يمكن فيها إيجاد حل للمعادلات التي على شكل: $x^2 + 1 = 0$.

وقبل أن نقوم بذلك سنورد بعض الملاحظات حول $\sqrt{-1}$ الذي جرت العادة بأن يرمز له بالحرف i، أي أن $i = \sqrt{-1}$.

نلاحظ أنه إذا كان b عددًا حقيقيًا موجبًا لذن

$$\sqrt{-b} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{b} = i\sqrt{b} = (i)(\sqrt{b})$$

ومما نعلم فإن $\sqrt{b}$ عدد حقيقي و لكن $\sqrt{-b}$ عدد غير حقيقي . ومن ذلك نرى أن حاصل ضرب "i" مع أي عدد حقيقي ينتج عنه عدد غير حقيقي .

كذلك إذا كان "a" عددا حقيقيا فإن $a+ib$

لا يمكن أن يكون عددًا حقيقيا لذن ib عدد غير حقيقي .

و نعطي الآن التعريف التالي :

تعريف (1) : يسمى العدد z عددًا مركبًا إذا كان $z = a+ib$

حيث a, b أعداد حقيقيه . أي أن مجموعة الأعداد المركبة هي المجموعة

$$C = \{ x+iy : x, y \text{ أعداد حقيقيه} \}$$

إذا كان $z=a+ib$ عددًا مركبا فإن الجزء "a" يسمى الجزء الحقيقي و "b" يسمى الجزء الخيالي من z .

ملحوظة :

** إذا كان x عددا حقيقيا فمن الممكن كتابته بالشكل التالي $x = x+i.0$

أي أن "x" عدد مركب . من ذلك نرى أن كل عدد حقيقي يكون عددًا مركبًا .

أي أن مجموعة الأعداد الحقيقيه هي مجموعة جزئيه فعليه من مجموعة الأعداد المركبه

(1-2) : خواص الأعداد المركبة

1- إذا كان $a = x+iy$ & $b = x'+iy'$ عددين مركبين فإن

$$a = b \iff x = x' \ \& \ y = y'$$

2- إذا كان : $x+iy = 0$ فإن $x = 0$ & $y = 0$

3- إذا كان $iy = 0$ فإن $y = 0$.

(ب-ج) جمع وضرب الأعداد المركبة:

تعريف (١): إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$ & $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين مركبين

فإن العدد $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

يسمى z حاصل جمع العددين z_1 & z_2.

نلاحظ أن z عدد مركب جزؤه الحقيقي $x_1 + x_2$ وجزؤه الخيالي $y_1 + y_2$

تعريف (٢): إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$ & $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين مركبين فإن

العدد " $z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ "

يسمى حاصل ضرب العددين z_1 & z_2.

نلاحظ هنا أيضا أن العدد z عدد مركب جزؤه الحقيقي $x_1 x_2 - y_1 y_2$

وجزؤه الخيالي $x_1 y_2 + x_2 y_1$

أمثلة توضيحية

① $(4 + 2i) + (3 - 4i) = (4+3) + i(2-4)$

$= 7 - 2i$

② $(6 + \sqrt{2}\,i) + (\sqrt{3} - 8i) = (6 + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 8)i$

③ $(2 + 5i) \cdot (3 + 4i) = (2(3) + 5(4))$

$+ i(2(4) + 5(3))$

$= (6 - 20) + i(8 + 15)$

$= -14 + 23i$

$i \times i = -1$

④ أوجد الجزء الحقيقي للمقدار الآتي: $(1+i)(2-i) + i(i-3)$

الحل: نتم عملية الضرب أولاً ثم الجمع نحصل على:

$(1+i)(2-i) + i(i-3) = (2 + i - i^2) + (i^2 - 3i)$

$= (2 + i - 1) + (1 - 3i) = 2 - 2i$.

$1 \times 2 + i^2 + i - i$

$2 + i^2 + i(-i + 2^i)$

$2 + 1 + 2i - i$

$2 + 1 + i$

∴ الجزء الحقيقي هو "2"

(٢-٢) : مرافق العدد المركب :

إن العدد المركب $x-iy$ يسمى مرافق العدد المركب $x+iy$.

ومن ذلك نرى أنه إذا كان $x+iy \neq 0$ عددًا مركبا فإن مقلوبه هو :

$$(x+iy)^{-1} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$$

وهو عدد مركب جزؤه الحقيقي يساوى $\frac{x}{x^2+y^2}$ وجزؤه التخيلي يساوى $\frac{-y}{x^2+y^2}$. فإذا رمزنا للعدد المركب بالعدد z فإنه مرافقه سيرمز له بالرمز $\bar{z}$.

ولمرافقات الأعداد المركبة الخواص التالية :

إذا كان $z = x_1 + iy$ فإن

(i) $z\bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2+y^2$

(ii) $z+\bar{z} = (x+iy)+(x-iy) = 2x$ ضعف الجزء الحقيقي

(iii) $z-\bar{z} = (x+iy)-(x-iy) = 2yi$ ضعف الجزء التخيلي

من (ii) سوف نكتب x " $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ " ويرمز Re للجزء الحقيقي

y " $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ " ويرمز Im للجزء التخيلي

(iv) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ (برهن ذلك)

(v) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (برهن ذلك)

ملحوظة :

يستخدم مرافق العدد المركب عند تعريف خارج القسمة لعددين مركبين أى بمعنى أن $\frac{z_1}{z_2}$ حيث $z_2 \neq 0$ يكون مركب فى حالة ضرب المقام فى مرافقه أى أن

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \cdot \frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$= \text{"} \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \text{"}$$

$$= \text{"} Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \text{"}$$

الناتج عدد مركب

تنبيه: إثبت أن $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ (تمرين)

أمثلة توضيحية

مثال (١): أوجد الجزء الحقيقي للكسر $\frac{3+i}{5-2i}$

الحل: بضرب بسط ومقام هذا الكسر في مكمل المقام وهو $5+2i$ نحصل على:

$$\frac{3+i}{5-2i} \cdot \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{(15-2)+i(6+5)}{25+4}$$

$$= 13/29 + i\ 11/29$$

$$\therefore Re\left(\frac{3+i}{5-2i}\right) = 13/29$$

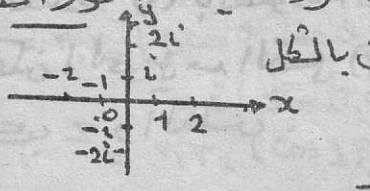
مثال (٢): أوجد قيمة الكسر $\frac{1+i}{1-i}$

الحل: بالضرب بسطا ومقاما هذا الكسر في مكمل المقام وهو $i+1$:

$$\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

(٤-٤): التمثيل الهندسي للأعداد المركبة:

وكما أن من الممكن تمثيل جميع الأعداد الحقيقية على الخط المستقيم فإن من الممكن تمثيل جميع الأعداد المركبة على المستوى (يعرف بمستوى آرجند). أي أنه يوجد تقابل بين مجموعة جميع نقاط المستوى وبين مجموعة جميع الأعداد المركبة. ويسمى محور السينات المحور الحقيقي ومحور الصادات المحور الخيالي كما هو مبين بالشكل



ومن الممكن كتابة العدد المركب

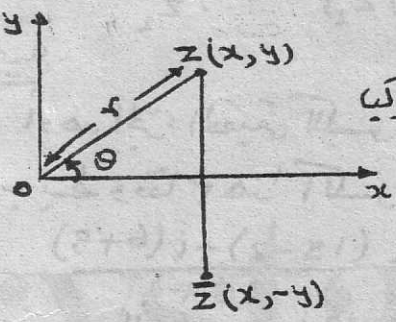
على شكل "زوج مرتب" ونعني بالزوج المرتب ما يلي :

تعريف : إذا كان x, y عددين حقيقيين فإن (x,y) يسمى زوجًا مرتبًا إذا كان $(x,y) \neq (y,x)$

ملحوظة : إذا كان $(x_1,y_1), (x_2,y_2)$ زوجين مرتبين فإن

$$(x_1,y_1) = (x_2,y_2) \iff x_1 = x_2 \text{ & } y_1 = y_2$$

ومن الواضح أنه يمكن تمثيل أى عدد مركب $z = x+iy$ بالزوج المرتب (x,y) بمستوى أرجاند . ويسمى هذا بالتمثيل الكارتيزى للعدد المركب



كما نستطيع أن نمثل العدد المركب بنوع آخر من التمثيل يعرف بالتمثيل القطبى للعدد المركب كما يلى :

بافتراض أن $z \neq 0$ عددا مركبا وأن r هو العدد $|z|$ وأن "θ" هى الزاويه التى يحصرها $|z|$ مع الجزء الموجب لمحور السينات فنجد أنه (r,θ) هو التمثيل القطبى للعدد المركب z . يسمى "r" بمقياس العدد z كما تسمى الزاوية "θ" بسعة العدد المركب z . نلاحظ من الشكل وجود الربط بين الزوجين (x,y) & (r,θ) أى أن

$$x = r\cos\theta \quad \& \quad y = r\sin\theta$$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$$\therefore z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= r\,\mathrm{cis}\,\theta \quad \ldots (1)$$

وتسمى العلاقة (1) بالصورة القطبيه للعدد المركب z .

ملحوظة : يمكن التحويل من التمثيل (x,y) إلى التمثيل (r,θ) للعدد المركب z والعكس .

$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ أوجد جذور

$\frac{x^6+1}{x+1} = 0$ i.e. $x^6 \neq 1$ apply de Moivre

$\therefore x^6 = -1 \Rightarrow x = (\text{cis}\,\pi)^{1/6}$

أمثلة توضيحية:

مثال (1): ضع الأعداد المركبة التالية في الصورة المثلثية (القطبية)

(i) $1+i$; (ii) $-1+i\sqrt{3}$

الحل:

(i) $z = 1 + i$: $r = |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ mod. Z

$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4 = \arg. Z$

$\therefore z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

(ii) $z = -1 + i\sqrt{3}$: $r = |z| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\tan\theta = -\sqrt{3}/1 = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 2\pi/3$

$\therefore z = 2\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

مثال (2): أوجد المقياس والسعة للعدد المركب $z = 1 + \sqrt{3}\,i$

الحل:

$\because z = x + iy = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow x = 1 \;\&\; y = \sqrt{3}$

$\because r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\theta = (z)$ سع $= \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$

مثال (3): ضع كل من الأعداد المركبة: $1, -1, i, -i$

في الصورة القطبية

* $1 = |\text{cis}\,0$, $-1 = \text{cis}\,\pi$ *

* $i = \text{cis}\,\frac{\pi}{2}$; $-i = \text{cis}(-\frac{\pi}{2})$ *

(5-ج): نظرية ديموافر:

لنفرض أن $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

فإن حاصل الضرب $z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$

$+ i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$

$= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

أى أن مقياس حاصل ضرب عددين مركبين يساوى حاصل ضرب مقياسى العددين
وسعة حاصل ضربهما يساوى حاصل جمع سعتيهما. إلا أن حاصل جمع القيمتين
الرئيسيتين $\pi - \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$ لسعتى العددين ليس بالضرورة القيمة الرئيسيه
لسعة حاصل الضرب. ونكتب

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$$

$$\text{سع}(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \text{سع}(z_1) + \text{سع}(z_2)$$

وإذا كان العدد $z = r\,\text{cis}\theta$ فإن

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\,\text{cis}\theta} \cdot \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

$$= \frac{1}{r}\,\text{cis}(-\theta) \qquad ; r \neq 0$$

أى أنه إذا كان العدد z مقياسه "r" وسعته θ فإن العدد $\frac{1}{z}$
يكون مقياسه $\frac{1}{r}$ وسعته "$-\theta$". وهكذا يكون خارج قسمة العددين

$$z_1/z_2 = r_1\,\text{cis}\theta_1 / r_2\,\text{cis}\theta_2 \qquad : z_1, z_2$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,\text{cis}\theta_1 \times \frac{1}{\text{cis}(\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,\text{cis}\theta_1 \cdot \text{cis}(-\theta_2)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,\text{cis}(\theta_1 - \theta_2) \qquad ; r_2 \neq 0$$

أى أن مقياس خارج قسمة عدد مركبين يساوى خارج قسمة
مقياس البسط على مقياس المقام وسعة خارج القسمة تساوى
سعة البسط مطروحاً منه سعة المقام ونكتب

$$|z_1/z_2| = r_1/r_2 = |z_1|/|z_2|$$

$$\text{سع}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \text{سع}(z_1) - \text{سع}(z_2)$$

نظرية ديموافر:

١- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً أو سالباً فإن

$$(\text{cis}\theta)^n = \text{cis}(n\theta)$$

** ب- إذا كانت p, q عددين صحيحين (ليس بينهما عامل مشترك سوى الواحد الصحيح) وكانت q موجبة فإن

$[\cos\theta + i\sin\theta]^{p/q}$ إحدى قيم $\text{cis}(\frac{p}{q}\theta)$، ولمقدار $[\cos\theta + i\sin\theta]^{p/q}$ له q من القيم المختلفة وهي

$$\text{cis}\left(\frac{p\theta + 2k\pi}{q}\right) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, q-1$$

البرهان: (أ): n عدد صحيح موجب أو سالب

(i) إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن

$$[\cos\theta + i\sin\theta]^n = \underbrace{(\text{cis}\,\theta).(\text{cis}\,\theta)\ldots(\text{cis}\,\theta)}_{n \text{ قوسًا}}$$

$$= \text{cis}(\theta + \theta + \ldots + \theta) = \text{cis}(n\theta) \quad *$$

وواضح أنه في هذه الحالة يكون $\text{cis}(n\theta)$ هي القيمة الوحيدة للمقدار $[\cos\theta + i\sin\theta]^n$.

(ii) إذا كانت n عددًا صحيحًا سالبًا ولتكن $n = -m$ فإن:

$$[\cos\theta + i\sin\theta]^n = [\cos\theta + i\sin\theta]^{-m} = \frac{1}{[\cos\theta + i\sin\theta]^m}$$

$$= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta) \quad \leftarrow \oplus$$

$$= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \text{cis}(n\theta)$$

وواضح أنه في هذه الحالة أيضًا يكون $\text{cis}(n\theta)$ هي القيمة الوحيدة للمقدار $[\cos\theta + i\sin\theta]^n$.

(ب): إذا كان "p" عددًا صحيحًا موجبًا أو سالبًا وكان "q" عددًا صحيحًا موجبًا:

فإنه كنتيجة للحالتين (i)، (ii) نحصل على

$$\left[\cos\left(\frac{p}{q}\theta\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}\theta\right)\right]^q = \cos(p\theta) + i\sin(p\theta)$$

$$= [\cos\theta + i\sin\theta]^p$$

وبأخذ الجذر "رقم q" للطرفين يكون $\text{cis}(\frac{p\theta}{q})$ "احدى قيم" $[\cos\theta + i\sin\theta]^{p/q}$ *. ونوجد فيما يلي القيمة الأخرى

** للمقدار $[\cos\theta+i\sin\theta]^{p/q}$. نفرض أن $\rho\,\mathrm{cis}\,\phi$ هي قيمة من قيم المقدار $[\cos\theta+i\sin\theta]^{p/q}$ فيكون

$$\rho^q(\cos\theta+i\sin\theta)^q=[\cos\theta+i\sin\theta]^p$$

أي أن $\rho^q\,\mathrm{cis}(q\phi)=\mathrm{cis}(p\theta)$

ومنها نستنتج أن:

$$\rho^q=1\Rightarrow\rho=1$$

$$q\phi=p\theta+2k\pi\quad;\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$\therefore\ \phi=\frac{p\theta+2k\pi}{q}\quad;\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

وهكذا فإن قيم المقدار $[\cos\theta+i\sin\theta]^{p/q}$ تكون

$$\cos\left(\frac{p\theta+2k\pi}{q}\right)+i\sin\left(\frac{p\theta+2k\pi}{q}\right)\quad;\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

والقيم التي تناظر "$k=0,1,2,\dots,q-1$" هي قيم مختلفة، وأية قيمة أخرى من قيم k لا تعطينا قيمة جديدة للمقدار $[\cos\theta+i\sin\theta]^{p/q}$. فقيم هذا المقدار التي تناظر "$k=q,q+1,\dots,2q-1$" هي بعينها القيم التي تناظر "$k=0,1,2,\dots,q-1$" على الترتيب. وقيمه التي تناظر "$k=-1,-2,\dots,-q$" هي بعينها التي تناظر القيم "$k=q-1,q-2,\dots,0$" على الترتيب. وهكذا فإن المقدار $[\cos\theta+i\sin\theta]^{p/q}$ له فقط "q" من القيم هي $\mathrm{cis}\left(\frac{p\theta+2k\pi}{q}\right)$ حيث $k=0,1,2,\dots,q-1$.

مثال (1): ضع المقدار الآتي في صورة مبسطة

$$z=[(\mathrm{cis}(4\theta))^2\cdot(\mathrm{cis}(-2\theta))^6]\,/\,[\mathrm{cis}(-3\theta)]^3$$

الحل:

$$z=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^8\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)^{-12}}{[\cos\theta+i\sin\theta]^{-9}}$$

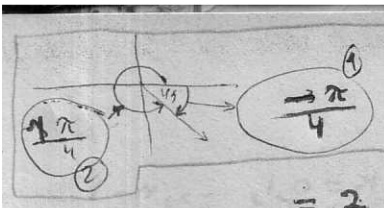
$$=[\cos\theta+i\sin\theta]^5=\cos(5\theta)+i\sin(5\theta)$$

مثال (2): حل المعادلة

$$x^5+32=0$$

الحل:

$$x^5=-32=(-1)\,2^5\Rightarrow x=2\,(-1)^{1/5}$$



$$= 2\left[\cos\pi + i\sin\pi\right]$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

القيمة $k=0$ تعطينا الجذر $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

القيمة $k=1$ " " $2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)$

القيمة $k=2$ " " $2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$

القيمة $k=3$ " " $2\,\mathrm{Cis}\left(\frac{7\pi}{5}\right) = 2\,\mathrm{Cis}\left(\frac{-3\pi}{5}\right)$

القيمة $k=4$ " " $2\,\mathrm{Cis}\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 2\,\mathrm{Cis}\left(\frac{-\pi}{5}\right)$

مثال (٣): أوجد جميع قيم المقدار $(1-i)^{2/3}$

الحل: نضع المقدار في صورته المثلثية فيكون على الصورة

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

وبالتالي فإن

$$(1-i)^{2/3} = 2^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right]$$

حيث $k = 0, 1, 2$. أي أن

$$k=0: \quad z = 2^{1/3}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2^{1/3}\left(\sqrt{3}/2 - \frac{1}{2}i\right),$$

$$k=1: \quad z = 2^{1/3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{1/3}\,i$$

$$k=2: \quad z = 2^{1/3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

$$= -2^{1/3}\left(\sqrt{3}/2 + \frac{1}{2}i\right)$$

(٦-٤): الجذور النونيه للواحد الصحيح :

المعنى بالجذور النونيه للواحد الصحيح هي جذور المعادلة $x^n = 1$

وحيث أن $1 = \mathrm{cis}\,0$ فإنه طبقا لنظريه ديموافر يكون

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \; ; k = 0, 1, \ldots, n-1$$

وعندما $k=0$ ؛ فإن $x=1$

عندما $k=1$ فإن $x = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ ، فإذا رمزنا لهذا الجذر بالرمز "ω" فواضح أن الجذور النونيه للواحد الصحيح هي :

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$$

مثال (1) : أوجد كلا من الجذور التكعيبيه والجذور الرباعيه للواحد الصحيح.

الحل : حيث أن $1 = \text{cis}\,0$ فإن :

أولا : الجذور التكعيبيه للواحد الصحيح :

$$1^{1/3} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3} \; ; \quad k = 0, 1, 2.$$

أى الجذور التكعيبيه للواحد الصحيح هي :

$$1 \; ; \; \text{cis}\frac{2\pi}{3} \; , \; \text{cis}\frac{4\pi}{3} \quad \therefore \quad 1 \; ; \; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \therefore \quad 1, \omega, \omega^2$$

وواضح أن $1 + \omega + \omega^2 = 0$

ثانيا : الجذور الرباعيه للواحد الصحيح :

$$1^{1/4} = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{4}\right) \; ; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

وسنجد أن الجذور هي $\cos 0 + i\sin 0 \; ; \; \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \; ; \; \cos\pi + i\sin\pi \; ; \; \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

أى $1, i, -1, -i$ والجذور أيضا على الصورة $1, \omega, \omega^2, \omega^3$

ونلاحظ أيضا أن $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 = 0$ [R.H.S]

(م) : التعبير عن قوى $\sin\theta \; ; \; \cos\theta$ [L.H.S] بدلالة جيوب وجيوب تمام مضاعفات θ :

إذا كتبنا $z = \text{cis}\,\theta \quad \ldots(1)$ & $\frac{1}{z} = \text{cis}(-\theta) \quad \ldots(2)$

وبالجمع والطرح يكون على الترتيب :

$$2\cos\theta = z + \frac{1}{z} \quad \ldots(3) \quad \& \quad 2i\sin\theta = z - \frac{1}{z} \quad \ldots(4)$$

ومن (1) & (2) يكون

$$z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \ldots (5)$$

$$\frac{1}{z^n} = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta) \quad \ldots (6)$$

وبالجمع والطرح يكون على الترتيب

③ $$2\cos(n\theta) = z^n + \frac{1}{z^n} \quad \ldots (7)$$

④ $$2i\sin(n\theta) = z^n - \frac{1}{z^n} \quad \ldots (8)$$

وتستخدم (3),(4),(7),(8) في كتابة قوى $\sin\theta$ أو $\cos\theta$ بدلالة جيوب وجيوب تمام مضاعفات الزاوية θ كما يتضح في المثالين التاليين

مثال (2): اكتب المقدار $\cos^2\theta \sin^4\theta$ بدلالة جيوب تمام مضاعفات الزاويه θ .

الحل: نضع $z = \text{cis}\theta$ فيكون

$$(2\cos\theta)^2 (2i\sin\theta)^4 = (z + \frac{1}{z})^2 (z - \frac{1}{z})^4$$

$$= (z^2 - \frac{1}{z^2})^2 (z - \frac{1}{z})^2$$

$$= (z^4 - 2 + \frac{1}{z^4})(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2})$$

$$= (z^6 + \frac{1}{z^6}) - 2(z^4 + \frac{1}{z^4}) - (z^2 + \frac{1}{z^2}) + 4$$

$$= 2\cos 6\theta - 4\cos 4\theta - 2\cos 2\theta + 4$$

اقسم على $2^2(2i)^4$

$$\cos^2\theta \sin^4\theta = \frac{1}{32}[\cos 6\theta - 2\cos 4\theta - \cos 2\theta + 2]$$

مثال (3): اكتب المقدار $\cos^2\theta \sin^3\theta$ بدلالة جيوب مضاعفات الزاوية θ .

الحل: بنفس خطوات المثال (2) نجد أن

$$(2\cos\theta)^2 (2i\sin\theta)^3 = (z^2 - \frac{1}{z^2})^2 (z - \frac{1}{z})$$

$$= 2i\sin 5\theta - 2i\sin 3\theta - 4\sin\theta$$

اقسم على $-32i$

$$\cos^2\theta \sin^3\theta = \frac{1}{16}[2\sin\theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta]$$

[R.H.S] [L.H.S]

(ب): التعبير عن جيوب وجيوب تمام مضاعفات θ بدلالة قوى $\sin\theta, \cos\theta$:

سوف نوضح هذه الطريقة بالمثالين الآتيين:

مثال (٤): أكتب $\cos 4\theta$ بدلالة قوى $\sin\theta$

الحل:

$$\begin{aligned}\text{cis}(4\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 \\ &= \cos^4\theta + 4\cos^3\theta(i\sin\theta) + 6\cos^2\theta(i\sin\theta)^2 \\ &\quad + 4\cos\theta(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^4\end{aligned}$$

بمساواة الجزء الحقيقي على الطرفين نحصل على:

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta \\ &= (1-\sin^2\theta)^2 - 6(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta + \sin^4\theta \\ &= 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta .\end{aligned}$$

مثال (٥): أكتب $\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta}$ بدلالة قوى $\cos\theta$

الحل:

$$\begin{aligned}\text{cis}\,5\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^5 \\ &= \cos^5\theta + 5\cos^4\theta(i\sin\theta) + 10\cos^3\theta(i\sin\theta)^2 \\ &\quad + 10\cos^2\theta(i\sin\theta)^3 + 5\cos\theta(i\sin\theta)^4 + (i\sin\theta)^5\end{aligned}$$

وبمساواة الجزء الخيالي على الطرفين يكون:

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$$

ويكون

$$\begin{aligned}\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} &= 5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta \\ &= 5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) + (1-\cos^2\theta)^2 \\ &= 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

[L.H.S] [R.H.S]

(ج): كتابة ظلال مضاعفات الزاوية θ بدلالة قوى $\tan\theta$:

تتضح هذه الطريقة من خلال المثال الآتي:

مثال (٦): أكتب $\tan 5\theta$ بدلالة قوى $\tan\theta$

الحل: من مبادئ حساب المثلثات نجد أن $\tan 5\theta = \frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta}$

$\therefore \text{cis}5\theta = (\cos\theta + \sin\theta)^5$

بمساواة الجزء الحقيقي وكذا الخيالي بالطرفين نجد أن

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta \sin\theta - 10\cos^2\theta \sin^3\theta + \sin^5\theta$$

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta \sin^2\theta + 5\cos\theta \sin^4\theta$$

و بالتالي نحصل على :

$$\tan 5\theta = \frac{5\cos^4\theta \sin\theta - 10\cos^2\theta \sin^3\theta + \sin^5\theta}{\cos^5\theta - 10\cos^3\theta \sin^2\theta + 5\cos\theta \sin^4\theta}$$

بالقسمة على $\cos^5\theta$ بسطا و مقاما نحصل على :

$$\tan 5\theta = \frac{5\tan\theta - 10\tan^3\theta + \tan^5\theta}{1 - 10\tan^2\theta + 5\tan^4\theta}$$

(ج-٧) : علاقات أويلر :

تعرف الدالة المركبة $e^{i\theta}$ ، حيث "θ" مقيسة بالتقدير الدائري بواسطة العلاقة التالية :

$$* \quad e^{i\theta} = \text{cis}\,\theta \quad \ldots (1)$$

تسمى العلاقة (1) بعلاقة أويلر .

فإذا كان $z = x+iy$ عدد مركب فإن "الدالة المركبة e^z" تعرف بطريقة أويلر كما يلي :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \,\text{cis}\, y .$$

ومن الواضح أن تعريف $e^{i\theta}$ بواسطة علاقة أويلر يحقق قوانين الأسس أي أن :

برهن ذلك

(i) $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

(ii) $(e^{i\theta})^p = e^{ip\theta}$

(iii) $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$

$\therefore \quad e^{i\theta} = \text{cis}\,\theta$

$** \quad e^{-i\theta} = \text{cis}(-\theta)$

بالجمع $\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

بالطرح $\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

$1/2i\,(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

ملحوظة: نستخلص مما سبق أن العدد المركب z يمكن تمثيله بصورتلات وهم: (i) الصورة الكارتيزيه $z = x + iy$

(ii) الصورة المثلثية $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$

(iii) الصورة الأسيه $z = r\,e^{i\theta}$

تمارين:

١- ضع الأعداد المركبه التاليه فى الصورة المثلثيه وكذلك الأسيه

$1 \pm i$; $-\sqrt{3} \pm i$; $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$; $1 \pm \sqrt{2}\,i$; $-1 - i$; $75 - 100\,i$

٢- أوجد قيم a, b الحقيقيه التى تحقق كلا من:

(i) $b = 3a^3 - (2+i)a + 4i - 5$

(ii) $(a+ib)^2 = -i$

٣- عبر عن كلا من الكسور الآتيه فى الصورة $x+iy$ حيث x, y حقيقيين:

(i) $\frac{2+i}{2-i}$; (ii) $\frac{1}{(a+ib)^2}$; (iii) $\frac{1}{(2+i)^2} - \frac{1}{(2-i)^2}$

(iv) $(5+2i)(3+i) - \frac{2+i}{i-1}$; (v) $\frac{(1+i)^2 - (2-i)}{5+12i}$

(vi) $\frac{1+\mathrm{cis}\,\theta}{1-\mathrm{cis}(-\theta)}$; (vii) $\frac{1}{(1-i)^2} - \frac{1}{(1+i)^2}$

٤- أوجد قيم كلا من المقادير التالية:

(i) $(16)^{1/4}$; (ii) $(-i)^{1/5}$; (iii) $(1+\sqrt{3}\,i)^{11/3}$; (iv) $(-1)^3$

(v) $(1-i)^{3/4}$; (vi) $(1-i)^8$, (vii) $(\mathrm{cis}\,\pi/4)^4 / \mathrm{cis}(-\frac{\pi}{4})^2$ *

٥- حل كلا من المعادلات الآتيه: (i) $x^3 = 8$; (ii) $x^9 + x^5 - x^4 = 1$

٦- اكتب بدلالة جيوب تمام مضاعفات الزاوية θ كلا من

(i) $\cos^5\theta$; (ii) $\sin^4\theta$; (iii) $\sin^4\theta\cos\theta$; (iv) $\cos^3\theta\sin^4\theta$

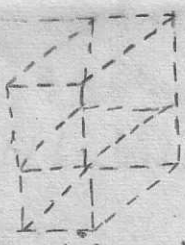
٧- عبر عن كلا من $\frac{\sin 6\theta}{\sin\theta}$ ، $\cos 5\theta$ ، $\cos 6\theta$ بدلالة قوى $\cos\theta$.

$|A| = |A^T|$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$

$|A| = |B| + |D|$ $\Leftrightarrow$ B & C have 2 identical C's or R's

$a|A| = |a \cdot A|$ $\because$ a x one C/R



الباب الثالث
المحددات

(٣-١) : المحددات الثنائية :

لحل المعادلتين

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \ldots (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \ldots (2)$$

نضرب المعادلة (1) في b_2 والمعادلة (2) في $-b_1$ ثم نجمع فنحصل على

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \quad \ldots (3)$$

أما إذا ضربنا المعادلة (1) في $-a_2$ والمعادلة (2) في a_1 ثم جمع فنحصل على

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 \quad \ldots (4)$$

يرمز للمقدار $a_1b_2 - a_2b_1$ بالرمز $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ وليس هذا الرمز محددًا ثنائيًا.

فالمحدد الثنائي يتكون من صفين، وعمودين وأربعة عناصر ونحصل على قيمته بقاعدة الضرب التقاطعي. وبهذا التعريف نجد أن

$$a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad ، \quad c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

وبذلك تأخذ (3)، (4) على الترتيب الصورتين :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \ldots (5)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \ldots (6)$$

ومن (5)، (6) نستنتج القاعدة الآتية (وتعرف بقاعدة كرامر) لحل معادلتين من الدرجة الأولى في مجهولين x, y. ويمكن صياغة قاعدة كرامر على النحو التالي :

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

بشرط أن $\Delta \neq 0$

بالصورة المختصرة : $x/\Delta x = y/\Delta y = 1/\Delta$

حيث Δ محدد المعاملات أما Δ_y ، Δ_x فهما المحددان الناتجان من إستبدال معاملى y ، x على الترتيب بالحدين المطلقين

مثال (١) : حل المعادلتين (أوجد موجه الحل ...)

$$3x+4y=5 \quad \& \quad 2x+5y=8$$

الحل : نأكد أولاً بأن الحدود المطلقة تكون فى طرف ثم صف المعاملات والحدود المطلقة على النحو التالى

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

طبق قاعدة كرامير فنحصل على

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}$$

أى أن $\frac{x}{-7} = \frac{y}{14} = \frac{1}{7}$ وهذا يجعل $x=-1$ ، $y=2$

وبالتالى فإن موجه الحل هو $(-1,2)$

مثال (٢) : أوجد موجه الحل للمعادلتين

$$3x-2y-12=0 \quad \& \quad x+3y+7=0$$

الحل : يترك كتمرين للطالب

(٣-٢) : المحددات الثلاثية :

يتكون المحدد الثلاثى من ثلاثة صفوف، وثلاثة أعمدة، وتسعة عناصر ويكتب على الصورة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (1)$$

وهو يرمز للمقدار $a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$

والذى يمكن حساب المحدد Δ عن طريق عناصر صفه الأول.

ونلاحظ أن المقدار هذا هو :

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \dots (2)$$

ونلاحظ أن "معامل a_1" في المفكوك (2) هو المحدد الثانوي الناتج من حذف الصف والعمود المشترك فيهما العنصر a_1 وسوف يطلق عليه إسم المحدد الثانوي للعنصر "a_1" ويرمز له بالرمز M_{11} وكذا بالنسبة للعناصر b_1, c_1 تكون المحددات الثانوية على الصورة M_{12}, M_{13} ويكون فك المحدد Δ على الصورة "$a_1 M_{11} - b_1 M_{12} + c_1 M_{13}$"

تعريف: إذا كان "M_{ij}" يدل على المحدد الثانوي للعنصر a_{ij} في محددة ما (نعني بأن هذا العنصر يقع في الصف الذي ترتيبه i والعمود الذي ترتيبه j) فإن المحدد المصاحب لهذا العنصر "a_{ij}" يعرف كالآتي: "$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$"

وهنا يمكن صياغة طريقة فك المحدد الثالث من خلال عناصر صفه الأول كالآتي:

"$\Delta = a_1 C_{11} + b_1 C_{12} + c_1 C_{13}$"

أي أن: قيمة المحدد = حاصل جمع حواصل ضرب عناصر أي صف (أو عمود) في المحددات المصاحبة لهذه العناصر

أمثلة توضيحية:

مثال (1): أوجد قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل: أولاً طريقة الفك العادية (من خلال عناصر العمود الأول)

$$2(12+5) - 4(18-25) + 1(-3-10) = 2(17) + 4(7) - 13$$

$$= 34 + 28 - 13 = 49$$

ثانياً: عن طريق المحددات الثانوية:

$$M_{11}(2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 5 = 17$$

$$M_{21}(4) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 25 = -7$$

$$M_{31}(1) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 10 = -13$$

$$\therefore \Delta = 2M_{11} - 4M_{21} + (1)M_{31} = 2(17) - 4(-7) + 1(-13)$$

$$= 34 + 28 - 13 = 49$$

مثال (٢): فك المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$1(5-8) - 2(10+4) + 3(4+1) = -3 - 28 + 15 = -31$

الحل: يترك كتمرين للطالب

ملحوظة: في حالة ايجاد قيمة المحدد Δ في المثال (١) باستخدام المحددات المصاحبة فنجد أن

$$C_{11}(2) = (-1)^{1+1} M_{11}(2) = 17$$

$$C_{21}(4) = (-1)^{2+1} M_{21}(4) = (-1)(-7) = 7$$

$$C_{31}(1) = (-1)^{3+1} M_{31}(1) = (1)(-13) = -13$$

$$\therefore \Delta = 2C_{11}(2) + 4C_{21}(4) + (1)C_{31}(1)$$

$$= 2(17) + 4(7) + 1(-13) = 49$$

(٣-٣): خواص المحددات:

بيّنا فيما سبق كيفية فك محددات الرتب الثانية والثالثة باستخدام التعريف. إلا أننا سنجد صعوبة عند فك محددات من رتبة أعلى بهذه الطريقة. لذا فإننا سنقوم أولاً بدراسة خواص المحددات لنصل عن طريقها إلى طريقة أبسط في فك المحددات عموماً. وتتضح هذه الخواص فيما يلي:

(١): لا تتغير قيمة المحدد إذا كتبنا صفوفه أعمدة وأعمدته صفوف.

نتيجة: نستنتج من هذه الخاصيه أنه إذا كان للمحدد خاصيه معينه بالنسبه إلى أعمدته فيكون له خاصية مماثله بالنسبه إلى صفوفه.

(٢): تتغير إشارة قيمة المحدد فقط إذا تبادل صفان (عمودان) الوضع.

(٣): إذا تشابه عمودان (صفان) فى المحدد فإن قيمة المحدد تنعدم

(٤): إذا ضربت عناصر عمود (صف) فى "عامل K" فإن قيمة المحدد تضرب فى K.

نتيجة: إذا كانت عناصر صف (عمود) فى المحدد نفس المضاعف للعناصر المناظرة من صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد تنعدم

(٥): لا تتغير قيمة المحدد إذا أضفنا إلى عناصر أى عمود (صف) نفس المضاعف (موجبا أو سالبا) للعناصر المناظرة فى عمود (صف) آخر.

وكثيرا ما تستخدم الخاصيه الخامسة فى تبسيط حساب قيمة المحدد.

مثال (١): أوجد قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 81 & 32 & 41 \\ 38 & 17 & 20 \\ 12 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

الحل: بطرح ضعف عناصر الصف الثانى من عناصر الصف الأول يكون

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 38 & 17 & 20 \\ 12 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

بطرح ثلاثه أمثال عناصر الصف الثالث من عناصر الصف الثانى نحصل على:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 12 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

ويمكننا بسهولة فك هذا المحدد الأخير من صفه الأول أو عموده الأول. ولكن نلاحظ أنه بالإمكان تبسيط Δ أكثر من ذلك - باضافة الصف الثانى إلى عناصر الصف الأول يكون

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 12 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{من الصف الأول}]{\text{الفك}} \Delta = 7 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 133$$

ملاحظه: يمكننا أيضا فك المحدد في المثال السابق بالطريقة الآتيه:

بطرح عناصر الصف الثاني وثلاثه أمثال عناصر الصف الثالث من عناصر الصف الأول يكون

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 38 & 17 & 20 \\ 12 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 17 & 20 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

وبطرح ثلاثه أمثال عناصر الصف الثاني من عناصر الصف الأول في المحدد الثاني يكون

$$\Delta = 7 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 133$$

فالمسألة الواحدة يمكن حلها بعدة طرق وتتوقف درجة التبسيط في الفك على خبرة الطالب ولكن الجواب في جميع الحالات واحد.

مثال (٢): فك المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

الحل: يترك كتمرين للطالب.

ونضيف إلى الخواص التي سبق الإشارة إليها تلك الخاصية

* (٦): حاصل جمع حواصل ضرب عناصر أي عمود (صف) في المحددات المصاحبة للعناصر المناظرة بعمود (صف) آخر يساوي صفرا

مثال: اعتبر المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

اوجد المحددات المصاحبة لعناصر العمود الأول في Δ:

$$C_{11}(2) = 17 \; ; \; C_{21}(4) = -7 \; \& \; C_{31}(1) = -13$$

بضرب هذه المحددات المصاحبة بالعناصر المناظرة في العمود الثاني مثلا نجد أن: $3(17) + 2(7) + 5(-13) = 51 + 14 - 65 = 0$

(٤-٣) : حل ثلاث معادلات من الدرجة الأولى في ثلاثة مجاهيل :

سندرس كيفية إيجاد موجه الحل للمعادلات

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \ldots (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \ldots (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad \ldots (3)$$

نختبر أن المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

بإجراء عمليه ضرب المعادلة (1) في العامل المصاحب للعنصر a_1 ، والمعادلة (2) في العامل المصاحب للعنصر a_2 والمعادلة (3) في العامل المصاحب للعنصر a_3 بالمحدد Δ إذا كانت A_1, A_2, A_3 هي العوامل المصاحبة للعناصر a_1, a_2, a_3 على الترتيب ثم الجمع نحصل على

$$(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)x + (b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)y + (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)z = d_1A_1 + d_2A_2 + A_3d_3 \quad \ldots (4)$$

فإذا تذكرنا أن حاصل جمع حواصل ضرب عناصر أي عمود في العاملات المصاحبة لهذه العناصر يساوي قيمته Δ وأن حاصل جمع حواصل ضرب عناصر أي عمود في العاملات المصاحبة للعناصر المناظرة لعمود آخر يساوي صفرا فإن (4) تختصر إلى

$$\Delta \cdot x = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3 \quad \ldots (5)$$

واضح أن الطرف الأيمن في (5) نحصل عليه بكتابة d_1, d_2, d_3 موضع a_1, a_2, a_3 على الترتيب . فإذا رمزنا إلى هذا المحدد الجديد بالرمز Δ_x فإننا نكون قد حصلنا على:

$$\Delta \cdot x = \Delta_x \quad \ldots (6)$$

باستبدال a_1, a_2, a_3 بعناصر العمود الثاني في Δ وبنفس ماتم سالفا نحصل على :

$$\Delta \cdot y = d_1B_1 + d_2B_2 + d_3B_3 \quad \text{---(7)}$$

والطرف الأيمن في (7) نحصل عليه بكتابة d_1, d_2, d_3 محل b_1, b_2, b_3 في Δ على الترتيب فاذا رمزنا للمحدد الجديد بالرمز Δ_y نحصل على

$$\Delta \cdot y = \Delta_y \quad \text{---(8)}$$

بالمثل يمكن إثبات أن $\Delta \cdot z = \Delta_z$ ... (9)

وبذلك تكون قد حصلنا على قاعدة كرامر لحل المعادلات (3)(2)(1) وهذه القاعدة هي :

محدد المعاملات مضروبا في أحد المجاهيل

= المحدد الناتج من كتابة العمود المطلقة موضع معاملات ذلك المجهول

من المعادلات (9), (8), (6) نحصل على

$$\frac{x}{\Delta_x} = \frac{y}{\Delta_y} = \frac{z}{\Delta_z} = \frac{1}{\Delta}$$

مثال (1) : حل المعادلات الآتية

$$2x - y + z = 3 \; ; \; 5x + 3y + 2z = 17 \; ; \; 3x + 4y - z = 8$$

الحل : أولا : التأكد من قيمة محدد المعاملات غير صفر

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$$

ثانيا : التأكد من أن العمود المطلق بالمعادلة بطرف وبقية المعادلة بطرف آخر ثم تكتب المعاملات والمطلق كالآتي

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 17 \\ 3 & 4 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

ثالثاً: نجد قيم المحددات

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 17 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -22$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 17 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -44$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 17 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -66$$

وبتطبيق قاعدة كرامر:

$$\frac{x}{-22} = \frac{y}{-44} = \frac{z}{-66} = \frac{1}{-22}$$

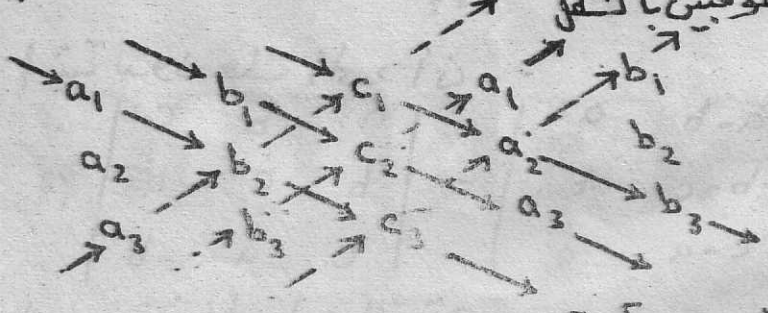
وبالتالي نحصل على

$$x = 1 \; ; \; y = 2 \; ; \; z = 3$$

ملحوظة:

هناك طريقة أخرى لفك المحددات ذات الرتبة الثلاثية بالطريقة القطرية أهدى إليها العالم الرياضي "سوراس" وهي كما يلي:

نكتب عناصر الأعمدة الثلاث للمحدد Δ ثم نعيد كتابة العمودين الأوليين على الترتيب كما هو مبين بالشكل



$$\Delta = [a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3] - [a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1]$$

مثال (٢): أوجد قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

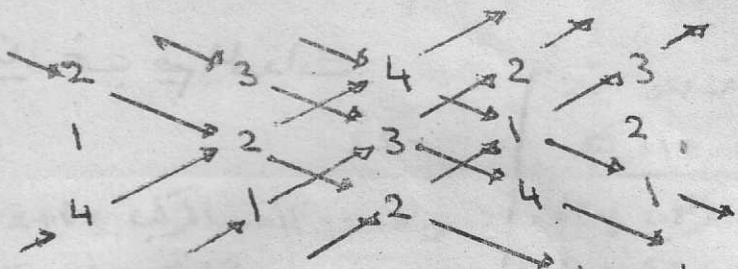
$(8+1+9) - (3+3+8)$

$-26 - 18 - 3$

$= -47$

26

الحل:



$\therefore \Delta = (8+36+4)-(32+6+6) = 4$

تمارين عامة:

١- اوجد قيمة a التي تجعل المحدد الآتي صفرا

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \\ a-1 & a & 3 \end{vmatrix}$$

٢- أوجد مجموعة الحل للمجموعة التاليه من المعادلات

(i) $x-y+z=18;\ 3x-4y=11;\ x-2y+z=1$

(ii) $x+2y-z+17=0;\ 2x-4z+1=0;\ 3y-5z-5=0$

(iii) $x+2y+3z=-7;\ 2x+y+2z+2=0;\ 3x+2y+z=3$

(iv) $2x-y+z=0,\ 3x+2y-5z=1;\ x+3y-2z=4$

٣- بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} = 0$$

٤- اثبت بدون فك المحدد أن

$$\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

٥- احسب قيمة المحددات الآتيه

(i) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$; (ii) $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}$

الباب الرابع

الكسور الجزئيه

تعلمنا فيما سبق كيفية إختصار الكسور بمعنى التعبير عن المجموع الجبرى لعدد من الكسور بدلالة كسر واحد وهى ما نعرف بطريقة توحيد المقام

فمثلا :

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}=\frac{x-a+x+a}{(x+a)(x-a)}=\frac{2x}{(x^2-a^2)}$$

والمطلوب فى هذا الباب إجراء عكس ذلك إى إذا علم أى كسر فكيف يمكن تحليله إلى مجموعة كسور أبسط منه (تعرف بكسور جزئيه) أى يكون لدينا الكسر $\frac{2x}{x^2-a^2}$ ونريد كتابته على صورة حاصل جمع كسرين . ويجب أن يلحظ الطالب أنه عند كتابة أى كسر فى صورة كسور جزئيه يشترط أن الكسر فعلى بمعنى أن تكون درجة البسط أصغر من درجة المقام".

تعريف(١) : يطلق على الدالة

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

اسم كثيرة حدود من درجة "n" وتعرف الثوابت $a_0, a_1, \dots, a_n$ بمعاملات كثيرة الحدود . ويمكن كتابة كثيرة الحدود بصورة مختصرة كالآتى : $P_n(x)=\sum_{r=0}^{n} a_r x^r$

حالات خاصة:

كثيرة الحدود التى من درجة صفر هى : $P_0(x)=a_0$

كثيرة الحدود التى من الدرجة الأولى هى . $P_1(x)=a_0+a_1x$

كثيرة الحدود التى من الدرجة الثانيه هى: $P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ وهكذا

تعريف(٢): يعرف الكسر بأنه كثيرة حدود على كثيرة حدود أى أن الكسر يكتب على الصورة $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_mx^m}$

ويكون هذا الكسر معرفا فى حالة استبعاد أصفار كثيرة الحدود $Q_m(x)$.

وبمقارنة درجتى البسط والمقام يكون لدينا الاحتمالات التاليه :

١- $m<n$ درجة البسط أكبر من درجة المقام

* ٢- $m = n$ درجة البسط تساوى درجة المقام

* ٣- $m > n$ درجة البسط اصغر من درجة المقام

والحالة الأخيرة هى التى يكون فيها الكسر فعلى وهنا يمكن كتابته فى صورة كسور جزئيه. أما الحالتيين (١)، (٢) يتطلب منا اجراء أولا عمليه قسمة مطوله فيكون الناتج هو "خارج قسمة + باقى". هنا الباقى يكون "كسر فعلى".

تتطلب عملية وضع الكسر فى صورة كسور جزئيه ما يلى:

* ١- أن يكون الكسر فعلى.

* ٢- "تحليل مقام الكسر" إلى حواصل ضرب أقواس فى أبسط صور.

وسوف ندرس بعض الحالات المختلفة:

الحالة الأولى: إذا كانت أقواس المقام بعد التحليل جميعها من الدرجة الأولى والقوة الأولى يكتب الكسر هنا على صورة $\frac{a_0}{(\quad)} + \frac{b_0}{(\quad)} + \frac{c_0}{(\quad)} + \dots$

أى أن كل قوس من أقواس المقام يصبح مقاما لكسر بسطه كثيرة حدود من درجة الصفر. والمطلوب هنا تحديد قيم الثوابت $a_0, b_0, c_0, \dots$. نلجأ إلى المقارنه بين "بسط الكسر" قبل وبعد تحليل مقامه "مستعينا بفكرة توحيد المقام إلى جانب البسط استفادة "بقدر المستطاع بأصفار المقام". بعد تحديد قيم هذه الثوابت يكون تم وضع الكسر فى صورة كسور جزئيه. والمثال التالى يوضح ذلك

مثال (١): حلل الكسر $\frac{5x+2}{3x^2+4x-4}$ إلى كسور جزئيه

الحل: واضح أن هذا كسر فعلى و نلاحظ أن مقامه يمكن تحليله على النحو التالى $(x+2)(3x-3)$ أى حاصل ضرب قوسين من الدرجة الأولى كل منها

أكتب الكسر المعطاه على الصورة $\frac{a_0}{3x-2} + \frac{b_0}{x+2}$

لتحديد الثوابت a_0, b_0 يتم ذلك من خلال المتطابقة

$$5x+2 \equiv a_0(x+2) + b_0(3x-2) \quad \dots (1)$$

نلاحظ أن أصفار المقام هى: $x = -2$ ، $+2/3$. عوض فى (١) كالآتى

$x=-2$: $8 = a_0(0) + b_0(8) \Rightarrow 8b_0 = 8 \Rightarrow \boxed{b_0 = 1}$

$x = 2/3$: $\frac{10}{3} + 2 = a_0\left(\frac{2}{3}+2\right) + b_0(0) \Rightarrow \boxed{a_0 = 2}$

∴ الكسر فى صورة كسور جزئيه يأخذ الوضع $\frac{2}{3x-2} + \frac{1}{x+2}$

مثال(٢): حلل الكسر $\frac{x^2}{(x-2)(x+3)}$ إلى كسوره الجزئيه

الحل: نلاحظ هنا أن درجة البسط تساوى درجة المقام وبالتالى فالكسر غير فعلى ولذا يتطلب منا إجراء عمليه القسمة

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-6 & 1 \\ \hline x^2+x-6 & \\ -x+6 & \end{array}$$

ويكتب الكسر على الصوره $1 + \frac{6-x}{(x-2)(x+3)}$

حيث "1" يعرف بخارج القسمة أما $\frac{6-x}{(x-2)(x+3)}$ فيعرف بالباقى وهو كسر فعلى والمطلوب وضعه فى صورة كسور جزئيه.

حيث الخطوات المتبعة فى مثال (١) يمكن إثبات أن:

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+3)} = 1 + \frac{4/5}{(x-2)} + \frac{9/5}{x+3}$$

الحالة الثانيه: بعض أقواس المقام ذات قوى أكبر من الواحد ولكن درجة أولى:

تاهم هنا قوى الأقواس فى تحديد عدد كسور الجزئيه للكسر وتكون بسوط هذه الأقواس جميعها من درجة الصفر. فمثلا

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+4)^2} = \frac{a_0}{(x-2)} + \frac{b_0}{(x+4)} + \frac{c_0}{(x+4)^2}$$

ويتم حساب الثوابت a_0, b_0, c_0 هنا باستخدام أصفار المقام والمقارنه معا لأن الأصفار فى هذه الحالة غير كافيه لتحديد الثوابت الثلاث ويمكن توضيح ذلك بالمثال هذا

الحل: الكسر فعلى ولتحديد الثوابت a_0, b_0, c_0 يتم من خلال المطابقة

$$2x+3 \equiv a_0(x+4)^2 + b_0(x-2)(x+4) + c_0(x-2)$$

أصفار المقام هما $x = 2, -4$:

$x=2$: $7 = a_0(2+4)^2 + b_0(0)(6) + c_0(0) \Rightarrow \boxed{a_0 = 7/36}$

لإيجاد الثوابت: 1) نكون أقواس البسط وعددها الثوابت و بعدد لها نجمع قوى x معا.
2) نساوى معاملات x فى كل من الطرفين و يستحسن أن توضع x بتوال تبعا لما هو الطرفين.

$$x=-4 \quad : \quad -5 \equiv a_0(0) + b_0(-6)(0) + c_0(-6) \Rightarrow \boxed{c_0 = \frac{5}{6}}$$

نلاحظ هنا أن b_0 لم يتم تحديده بعد لذا نلجأ لأسلوب مقارنة طرفى المطابقة

x^2 معامل : $0 = a_0 + b_0 \Rightarrow b_0 = -a_0 = -7/36$

$$\therefore \frac{2x+3}{(x-2)(x+4)^2} = \frac{7/36}{(x-2)} + \frac{-7/36}{(x+4)} + \frac{5/6}{(x+4)^2}$$

* الحالة الثالثة: بعض أقواس من الدرجة أعلى من الأولى ولا يمكن تحليلها ولكن قوى أولى.

سوف هذه الحالة بالمثال التالى:

مثال (٣): حلل الكسر $\frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)}$ إلى كسور جزئيه

الحل: واضح أن الكسر فعلى فيمكن وضعه على صورة كسور جزئيه

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)} = \frac{a_0}{(x-1)} + \frac{b_0+b_1x}{x^2+x-4}$$

واضح كذلك أن القوس (x^2+x-4) لا يمكن تحليله كحاصل ضرب قوسين من الدرجة الأولى. سوف نعمل الآن على إيجاد قيم الثوابت a_0, b_0, b_1 كالآتى

$$2 \equiv a_0(x^2+x-4) + (b_0+b_1x)(x-1) \quad \ldots (1)$$

نفضل هنا "مقارنة معاملات x" فى المطابقة (1):

الحد المطلق: $2 = a_0(-4) + b_0(-1) \quad \ldots (2)$

x معامل: $0 = a_0(1) + b_0(1) + b_1(-1) \quad \ldots (3)$

x^2 معامل: $0 = a_0 + b_1 \quad \ldots (4)$

بحلها ⟸ فى الثوابت الثلاثة

$$-2a_0 = 2 \Rightarrow \boxed{a_0 = -1} \; ; \; b_0 = 2 \; ; \; b_1 = 1$$

$$\therefore \frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+x-4}$$

* الحالة الرابعة: عوامل المقام من درجة أعلى من الأولى ولا يمكن تحليلها ولكن قوى أعلى من الأولى لبعضها:

سوف نوضح هذه من خلال المثال الآتى:

مثال (٤): حلل الكسر $\frac{x^2+2x+5}{(2x^2+6x+7)^2}$ إلى كسور جزئيه

الحل: واضح أن القوس $(2x^2+6x+7)$ لا يمكن تحليله لحاصل ضرب قوسين من الدرجة الأولى إلى جانب أنه قوس المقام هنا ذات القوة الثانيه.

$\frac{3}{2}$ إذا صعب إيجاد الثوابت عن طريق مقارنة المعامل = نعوض عن x بأي قيم في المتطابقة التي تجعله = ٠، إذا لم نوجد جميع الثوابت بنتج $\frac{2}{3}$ كـ $\frac{3}{2}$

يكتب الكسر على الصورة $\frac{a_0+a_1x}{(2x^2+6x+7)} + \frac{b_0+b_1x}{(2x^2+6x+7)^2}$

لتحديد قيم الثوابت $a_0, a_1; b_0, b_1$:

$$x^2+2x+5 \equiv (a_0+a_1x)(2x^2+6x+7) + b_0+b_1x$$

مقارن معامل x^3 : $0 = a_1$

مقارن معامل x^2 : $1 \equiv 2a_0 + 6a_1$ $\Rightarrow \boxed{a_0 = 1/2}$

مقارن معامل x : $2 = 6a_0 + 7a_1 + b_1 \Rightarrow 2 = 6/2 + b_1 \Rightarrow \boxed{b_1 = -1}$

مقارن الحد المطلق : $5 = 7a_0 + b_0 \Rightarrow b_0 = 5 - 7/2 = \frac{3}{2}$

$$\therefore \frac{x^2+2x+5}{(2x^2+6x+7)^2} = \frac{1}{2}\left/(2x^2+6x+7)\right. + \frac{3/2 - x}{(2x^2+6x+7)^2}$$

تطبيقات على الكسور الجزئية:

من أهم التطبيقات للكسور الجزئية ما يلي:

(أ): تستخدم في إحدى طرق التكامل غير المحدود" حيث يكون* الكسر المراد تكامله في صورة غير قياسية* وسوف يتم شرح ذلك في مقرر التفاضل والتكامل

(ب): يساعد على* كتابة كسر ما في صورة قوى x* وذلك بتطبيق "نظرية ذات الحدين" وسوف يتضح ذلك من خلال المثال التالي

to solve a problem like this a) 1) find (t_n) 2) use Partial fruction on this (t_n) 3) find (S_n) 4) find $\lim_{n\to\infty} S_n$

مثال: عبر عن الكسر $\frac{2}{(x-3)(x+4)}$ بدلالة قوى x

الحل: أولا: نضع هذا الكسر في صورة كسور جزئية نجد أنه على الصورة

$$\frac{2/7}{x-3} + \frac{-2/7}{x+4}$$

ثانيا: نطبق نظرية ذات الحدين على "كل كسر على حدة"

$$\frac{2}{7(x-3)} = -\frac{2}{21}(1-\tfrac{x}{3})^{-1} = -\frac{2}{21}\left[1 + \frac{-1}{1!}(-\tfrac{x}{3})^1 + \frac{(-1)(-2)}{2!}(-\tfrac{x}{3})^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(-\tfrac{x}{3})^3 + \cdots\right]$$

$$= -\frac{2}{21}\left[1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \cdots\right]$$

$$\frac{-2}{7(x+4)} = -\frac{2}{28}(1+\tfrac{x}{4})^{-1} = -\frac{2}{28}\left[1 + \frac{-1}{1!}(\tfrac{x}{4}) + \frac{(-1)(-2)}{2!}(\tfrac{x}{4})^2 + \cdots\right]$$

$$= -\tfrac{2}{28}\left[1 - x/4 + x^2/16 - x^3/64 + \cdots\right]$$

ويكون صياغة الكسر على صورة قوى x كالآتى

$$\frac{2/7}{x-3}+\frac{-2/7}{x+4}=\frac{-2}{21}\left[1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}-\frac{x^3}{27}+\cdots\right]$$
$$+\frac{-1}{14}\left[1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{16}-\frac{x^3}{64}+\cdots\right]$$
$$=\frac{-1}{6}+\left(\frac{2}{63}+\frac{1}{56}\right)x-\left(\frac{2}{108}+\frac{1}{14\times16}\right)x^2+\cdots$$

(ح)- جمع بعض المتسلسلات الغير منتهيه عن الحد النونى :

يمكن توضيح هذه الحالة من خلال المثال الآتى

مثال: أوجد مجموع n- حدا الأولى للمتسلسلة اللانهائيه :

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots$$

الحل: ∴ الحد النونى للمتسلسلة هو $a_n=\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

باستخدام الكسور الجزئيه نجد أن

$$a_n=\frac{\frac{1}{4}}{4n-3}+\frac{-1/4}{4n+1}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right]$$

فإذا كان S_n يرمز لمجموع n- حدا الأولى من هذه المتسلسلة فإن

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)\right.$$
$$+\cdots\left(\frac{1}{4n-7}-\frac{1}{4n-3}\right)$$
$$\left.+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)$$

فإذا كان S هو مجموع هذه المتسلسلة فإن

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}(1-0)=\frac{1}{4}$$

نستخلص مما سبق شرحه مايلى

١- عند كتابة نظ الكسر يكون كثيرة حدود "درجته أقل بدرجة واحدة من درجة المقام" كما ننوه بأن "عدد ثوابت الكسور يتفق مع درجة المقام".

٢- من الممكن أن يكون المقام عبارة عن حاصل ضرب أقواس يجمع بين الحالات بعضها البعض الذى سبق دراستها

٢- لتحديد قيم الثوابت يجب أن يكون عدد المعادلات المشتملة عليها مساويا لعدد الثوابت. فأحيانا تكون أصفار المقام غير كافية لتحديد قيم هذه الثوابت لهذا نلجأ إلى أسلوب المقارنة بين معاملات طرفي المتطابقة.

تمارين عامة

(أ)- عبر عن الكسور التالية في صورة كسور جزئية

(1) $\frac{2x+3}{x^2-2x-3}$; (2) $\frac{x^2}{x^2-5x+6}$

(3) $\frac{2x^2}{(x-1)(x^2+4x-5)}$; (4) $\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}$

(5) $\frac{x^3-5}{(x-1)(x-2)}$; (6) $\frac{x^3+1}{(x^2-1)(x+3)}$; $x \neq -1$

(7) $\frac{x^2-4}{x^2-6x-7}$; (8) $\frac{2x^2+3x+1}{(x-2)^2(x-3)}$

(9) $\frac{4x^5}{(x^2-1)(x^2-4)}$; (10) $\frac{2x^2+3x+4}{(x+1)^2(x^2+2)}$

(ب)- عبر عن الكسور التالية في صورة قوى للمتغير x

(i) $\frac{4x}{(2x+1)(x+2)}$; (ii) $\frac{x^2}{x^2-6x+8}$

(iii) $\frac{3x+1}{x^4-16}$; (iv) $\frac{x+2}{(x+1)(x+4)^2}$

(v) $\frac{2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; (vi) $\frac{1}{(x+5)(x^2-2x+1)}$

جـ- أوجد مجموع n- حدا الأولى للمتسلسلات التالية

(i) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\dots$; (ii) $\frac{1}{1\times2}+\frac{2}{3.4}+\frac{3}{5.6}+\dots$

(iii) $\frac{1}{1\times3\times5}+\frac{1}{3\times5\times7}+\frac{1}{5\times7\times9}+\dots$

الباب الأول

مقدمة عن الحاسبات الآليه

(١-١) : ماهو الحاسب الآلى : What is a computer ?

آلة حاسبة الكترونيه وليس عقل الكترونى كما يطلق عليه الكثيرين حيث أن من خواص العقل القدرة على التفكير والإبتكار والتى لا يستطيع الكمبيوتر القيام بها لأنه ماهو إلا منفذ جيد للبرامج التى يعدها العقل البشرى وذلك بسرعة فائقة .

(١-٢) : تعريف الحاسب الآلى :

يرجع أصل كلمة كمبيوتر Computer إلى الكلمة اللاتينيه computare " ومعناها " يحسب " لهذا يمكن اطلاق لفظ كمبيوتر على أى آلة أو جهاز يساعد فى الحساب . ولكن أصبح من المتعارف عليه اطلاق مصطلح الكمبيوتر على ذلك النوع من الأجهزة التى تتصف بالخصائص التاليه :

١- ذو سرعة عاليه :

استخدام الدوائر الإلكترونيه فى مكوناته ساعدت على جعله ذو سرعة فائقه حيث تقاس سرعة تداول العمليه الواحدة بالحاسب الآلى بالميكروثانيه (Micro-second)

٢- القدرة على التخزين الداخلى :

عادة تحتوى الحاسبات الآليه على وحدات تخزين داخليه تسمى بالذاكرة Memory

٣- القدرة على تعديل البرامج المخزنه :

وهذا يعنى أن الحاسب الآلى هو جهاز له القدرة على :

(i) تقبل البيانات و التعليمات وتخزينها في ذاكرته الرئيسيه لحين استخدامها

(ii) تشغيل البيانات "Data" طبقا للتعليمات المخزنة.

(iii) إخراج نتائج التشغيل في صورة يمكن استخدامها.

(iv) تعديل التعليمات "Instructions" أثناء التنفيذ.

(v) البدء في إدخال "Input" وإخراج "Output" البيانات والتشغيل بسرعة فائقة و المقصود هنا بكلمة التشغيل هو مجموعة العمليات المطلوب تنفيذها على البيانات للحصول على النتائج المطلوبه.

(٣-١) : نبذة تاريخيه :

سوف نكتفي في هذا العرض التاريخي بذكر نظام الأجيال للحاسبات الآليه :

الجيل الأول (١٩٥١) :

لقد صمم أول حاسب الكتروني عام ١٩٤٦ بواسطة العلماء جون موشلي وايكات وجولدن شاين وهو الحاسب إنياك "ENIAC" والذي تم تصميمه للجيش الأمريكي ويمكنه "تنفيذ 300" عملية ضرب في الثانية الواحدة.

ثم كون جون موشلي وايكات شركة لإنتاج أول حاسب تجاري للسوق المحلي اسمه يونيفاك-١ (UNIVAC-1). وقد استخدم في تكوينه صمامات الكترونية مفرغة (Vaccum Tubes).

الجيل الثاني (١٩٥٩) :

حيث استخدمت عناصر الترانزستور في بناء دوائر أجهزة الحاسب الآلي بدلا من الصمامات المفرغه وبذلك أمكن تصغير حجم الوحدات التي

تستخدم للتخزين داخل الحاسب مع زيادة سعتها التخزينيه .

الجيل الثالث ١٩٦٠-١٩٦٤ :

منذ عام ١٩٦٠ استخدمت الدوائر الإلكترونيه المطبوعة والدوائر الإلكترونيه المتكامله بدلا من الترانزستور في تصميم الحاسبات .

الجيل الرابع :

ولقد ظهر في أوائل السبعينات بعد أن تطورت الدوائر الإلكترونيه المتكامله Integrated Circuits بسرعة كبيرة وأصبحت ذات سعة كبيرة وذلك بعد أن تم تطويع المواد فوق الموصله . وظهر أيضا في هذا الجيل الحاسبات الآليه الصغيرة والتي تستطيع القيام بنفس وظائف الحاسبات الآليه الكبرى وبنفس الكفاءة .

(٤-١) : تصنيف الحاسبات الآليه :

عادة ما يتم تصنيف الحاسبات الآليه حسب : الغرض من الاستخدام - نوع الحاسب الآلي - سعة الحاسب الآلي :

أولا : الغرض من الاستخدام :

تنقسم الحاسبات الآلية إلى نوعين :

أ- حاسبات ذات أهداف خاصة :

وهي الحاسبات التي يتم تصميمها من أجل هدف خاص مثل الحاسبات المستخدمة في توجيه الطائرات والصواريخ وغيرها من الاستخدامات الحربيه والمدنيه . ومثل هذه الحاسبات لا تصلح إلا للغرض الذي صممت من أجله فقط .

ب- حاسبات ذات أهداف عامة :

وهي الحاسبات التي تصمم لمعالجة مجموعة متنوعة من الأعمال والمشاكل العلميه والتجاريه والإداريه وغيرها . ومثل هذه الحاسبات

هى الأكثر انتشارا لما لها من أهمية قصوى فى إدارة وحل الكثير من المشكلات

ثانيا: نوع الحاسب:

تنقسم الحاسبات الآليه إلى ثلاثة أنواع هى:

أ- الحاسبات الرقميه "Digital Computers":

تقوم بتنفيذ العمليات عن طريق تمثيل الأعداد الحقيقيه والكميات بطريقة رقميه ومن ثم تقوم بإجراء العمليات الحاسبيه والمنطقيه المختلفة وهو آلة الحاسبات الآليه استخداما.

ب- الحاسبات القياسيه Analog Computers:

تقوم بتنفيذ العمليات عن طريق وسائل القياس المتعلقة بظواهر طبيعيه مثل درجات الحرارة والضغط الجوى والرطوبه ونبضات القلب وغيرها من الظواهر. وتستخدم مثل هذه الأجهزة بالمستشفيات ومصلحة الأرصاد الجويه.

ج- الحاسبات المختلطه: "Hybrid computers"

وهى تجمع بين النوعين السابقين بمعنى أنه يتقبل البيانات رقميه وغير الرقميه وهى مناسبة فى مجالات علوم الفضاء وعلوم الكيمياء وغيرها من شتى المجالات.

ثالثا: سعة الحاسب:

تقاس سعة الحاسب عادة بوحدات تسمى بالبايت "Byte" حيث يتكون البايت من ثمانيه "Bit" وهى أصغر وحدة تخزينيه للحاسبات الآليه ويتقبل إما الصفر أو الواحد الصحيح. أما الكيلو بايت "K-byte" أو KB فيتكون من ١٠٢٤ بايت ما يشبه Bit وتنقسم الحاسبات من حيث سعتها إلى ثلاثة أنواع هى:

أ- حاسبات صغيرة السعة:

وتسمى بالميكروكمبيوتر Micro-computer أو الكمبيوتر المنزلى أو الكمبيوتر الشخصى personal computer أو كمبيوتر الجيب ومثل هذه الأجهزة تتراوح سعتها التخزينية مابين ١٦-كيلوبايت - ٦٤٠ كيلوبايت وهى تصلح للأغراض التعليمية على مستوى المدارس والمرحلة الجامعية الأولى وكذا الاستخدام الشخصى أو المنزلى

ب- حاسبات متوسطة السعة:

وتسمى بالمينى كمبيوتر Mini- computer وهذه الأجهزة سعتها مابين ٦٤٠ كيلوبايت إلى حوالى ٢-ميجابايت وهى تصلح للأبحاث بالكليات أو إدارة مستشفى أو شركة صغيرة

جـ- حاسبات كبيرة السعة:

وتسمى Large size computer وهى أجهزة ذات سعات تزيد عن ٢-ميجابايت. وتصلح للأغراض العامة بالوزارات الحكومية وشركات الطيران العالمية والبحث العلمى داخل جامعة متعددة الكليات والأقسام.

(٥-١): المكونات الأساسية للحاسب الآلى الرقمى:

تتكون الحاسبات الآلية عادة من ثلاث وحدات أساسية (شكل ١) وهى:

أ- وحدة المدخلات "Input Devices"

وتعمل هذه الوحدة على إدخال البيانات للحاسب الآلى وتوجد العديد من أجهزة إدخال البيانات ويختلف نوع كل منها عن الآخر تبعا لنوع الحاسب الآلى ومن أمثلة أجهزة ادخال البيانات مايلى:

(i) لوحة المفاتيح Key-board

(ii) وحدة قراءة البطاقات المثقبة Punched Card Reader

(iii) وحدة قراءة الشرائط المغنطة Magnetic Tape

(iv) وحدة قراءة الشرائط الورقية المثقبة Punched Tapes

(v) وحدة قراءة الاسطوانات المغنطة Magnetic Disk

ب - وحدة التشغيل المركزى (C.P.U.)

وهى تتكون من ثلاثة اجزاء رئيسيه

(i) وحدة التحكم Control unit

وهذه الوحدة هى بمثابة العقل للجسم البشرى فهى التى تتولى إدارة العمل داخل الحاسب بمعنى القيام باعمال التحكم والرقابة والتنظيم والتنسيق بين عمل الوحدات المختلفة مع القيام بتوجيه وتحديد العمليات اللازمة لعمل جميع وحدات الحاسب طبقا لمجموعة التعليمات الموجودة بالبرنامج.

(ii) وحدة التخزين Storage unit

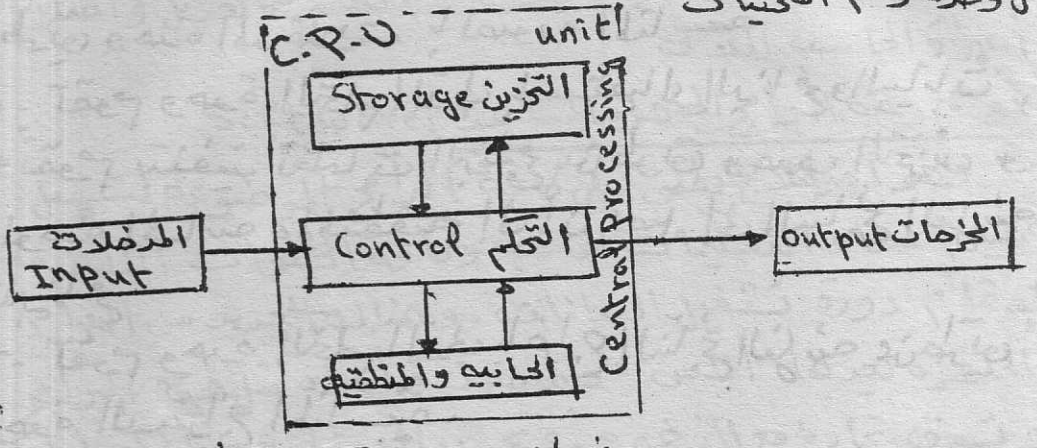
وهذه الوحدة هى التى يخزن عليها الحاسب الآلى البيانات والتعليمات والبرامج وكذا تخزين النتائج المؤقتة للعمليات الحسابيه والمنطقيه والنتائج النهائيه للتشغيل استعدادا لاخراجها.

(iii) وحدة العمليات الحسابيه والمنطقيه: Arithmatic/logic unit

وتقوم هذه الوحدة تحت إشراف وتوجيه وحدة التحكم بكافة العمليات الحسابيه من جمع وطرح وضرب وقسمة كما تقوم بالعمليات المنطقيه كالمقارنة والاختيار والتفرع. فيمكننا مثلا مقارنة رقمين لمعرفة اكبر

هـ - وحدة الإخراج Output Device

وهذه الوحدة تقوم باستقبال النتائج ثم توجيه وحدة التحكم وتقوم باخراجها إما بطباعتها على وحدات الطباعة Printers أو على شاشات العرض Monitors وغيرها من وسائل الإخراج مثل وحدة رسم المنحنيات



شكل (١) مكونات الحاسب الآلي

(٦-١) : خطوات استخدام الحاسب الآلي :

لاستخدام الحاسب الآلي في تشغيل بيانات مشكلة فإنه يلزم اتباع الخطوات التالية :

١- الدراسة التفصيلية للمشكلة المطلوب دراستها وذلك بهدف كتابة الصياغة الرياضية المناسبة لها حتى يمكن معالجتها بواسطة الحاسب ويتم ذلك عن طريق شخص متخصص يسمى محلل النظم .

٢- وضع خطة البرنامج المناسب للصياغة الرياضية للمشكلة عن طريق أشكال ورسومات تعرف بخرائط التدفق Flowcharts

٣- كتابة البرنامج اللازم للمشكلة بإحدى لغات الحاسب الآلي المناسبة لطبيعة المشكلة المطلوب معالجتها وفي العادة يقوم شخص

متخصص آخر يسمى بالمبرمج Programmer

ويجدر الإشارة هنا إلى أنه يفضل أن يكون هناك نوع من التنسيق بين محلل النظم والمبرمج حتى يمكن إخراج البرنامج الملائم للمشكلة في صورته الصحيحة.

٤- إدخال البرنامج "Program" والبيانات للحاسب الآلي عن طريق وحدة المدخلات بالصورة المناسبة

٥- تقوم وحدة التحكم الآلي باستقبال البرنامج والبيانات وتقوم بتنفيذ تعليمات البرنامج عن طريق وحدتي التخزين و الوحدة الحسابية والمنطقية إلى أن تصل إلى النتائج النهائية للبرنامج.

٦- تقوم وحدة التحكم الآلي بإخراج النتائج النهائية عن طريق وحدة الإخراج المناسبة.

(٧-١): بعض المفاهيم الأساسية لعلم الحاسب الآلي.

١- البرامج Program:

وهو عبارة عن سلسلة واضحة ومحددة من التعليمات والخطوات لتنفيذ عمل معين أي أن البرنامج هو مجموعة مرتبة من الخطوات يقوم الحاسب الآلي بتنفيذها بالتتابع وذلك لتحقيق هدف معين.

وهناك العديد من البرامج مثل برامج التطبيق وتستخدم في حل الكثير من المشكلات الرياضية والفيزيائية والإدارية وغيرها. وأيضا برامج الترجمة من لغة حية لأخرى وهناك برامج نظم التشغيل Dos.

ويجدر الإشارة هنا أن الحاسب الآلي بدون برامج لا فائدة له وهو يختلف اختلافا واضحا عن الآلات الحاسبة لأن الآلة الحاسبة لا تحتاج لبرنامج لتشغيلها بل تتطلب التدخل في إجراء كل عملية حسابية

أما الحاسب الآلى فلا يدله من برامج ما لإجراء أى عمليه حسابيه ولا يتطلب أى تدخل أثناء إجراء البرنامج.

٣- الأجهزة والآليات: Hard ware

وهى مصطلح يطلق على كل ما يتعلق بتصميم وتركيب الحاسب الآلى ومن ثم فإن هذا المصطلح يطلق على علم تصميم وتعديل واصلاح أجهزة الحاسب الآلى

٢- مجموعة البرامج الجاهزة المساعدة: Soft ware

وهو إصطلاح يطلق على كافة البرامج الموضوعة لتسهيل عمليه إعطاء التعليمات للحاسب وكافة الخطوات اللازمة لإتمام دورة تشغيل البيانات. وهناك العديد من البرامج الجاهزة يعدها أناس متخصصون فى إعداد مثل هذه البرامج وتوفر تجاريا مع الأجهزة. ويجدر الإشارة هنا إلى أن البرامج الجاهزة لإنتاج شركة ما للحاسبات الآليه ربما لا يصلح لأجهزة انتاج شركة أخرى فيما عدا الأجهزة المتوافقة.

٤- الأقراص المرنة Floppy Disk

وهى اقراص ذات أطوال ٢½ بوصة أو ٥¼ بوصة وبعضها يقبل التخزين على وجه واحد وتسمى single side و بعضها يقبل التخزين على الوجهين وتسمى Double side. و هذه الأقراص تستخدم عادة فى تخزين البرامج المراد الحفاظ بها فترة لحين الحاجة إليها مرة أخرى. ونشير هنا إلى أن معظم البرامج الجاهزة تباع مخزنه على مثل هذه الأقراص المرنه.

٥- وحدات التخزين الصلبه، Hard disc

وهى عبارة عن أجزاء الكترونيه تضاف لبعض أجهزة الحاسب

الدّلى بغرض زيادة سعتها التخزينيه وذلك حتى تتحمل تنفيذ البرامج التى تتطلب سعة تخزينيه كبيرة . وهذه الاجراء الاضافيه يمثل زيادة كفاءة الحاسب الدّلى ليس فقط من حيث السعة بل ايضا من حيث سرعة التشغيل

(٨-١): لغات الحاسب الدّلى :

لكى يتسنى لنا التعامل مع الحاسب الدّلى فانه يجب أن توجد لغة مشتركة يفهمها كل من مخططى البرامج . ونظرا لان هناك العديد من الشركات المنتجه للحاسبات الدّليه ومن ثم الاختلاف بين التقنيه المستخدمه فى كل شركة فان ذلك ادى إلى ظهور مايسمى بلغة الجهاز Machine language او Low level language . ونظرا لاهميه توحيد اللغات المتداولة بين مخططى البرامج على مستوى الدول فقد ظهرت لغات أخرى تسمى باللغات الراقيه High level language . ويكفى أن تتعلم احدى هذه اللغات الراقيه لتتعامل مع اى حاسب آلى مهما اختلف مصدر إنتاجه . ويوجد مايسمى بالمترجم compiler وفائدته هو الترجمه مابين اللغة الراقيه ولغة الجهاز . ونشير هنا إلى أن المترجم بين لغة راقية ما وجهاز معين لايصلح للترجمه مابين نفس اللغة الراقيه وجهاز آخر . ويوجد العديد من اللغات الراقيه مثل

١- لغة فورتران FORTRAN :

وهى إختصار لـ "FORmula TRANslation" وهذه لغة استحدثت فى الخمسينات من هذا القرن لخدمة المجالات العلميه والهندسيه وتتميز هذه اللغة بامكانيه تعاملها مع الكميات التخيليه مما أدى

إلى إنتشارها في مجالات التطبيقات الحسابيه و الهندسيه. ولغة الفورتران تطورت زمنيا من FORTRAN(5) إلى FORTRAN(4) حتى وصلت إلى FORTRAN(77)

ب- لغة الجول : ALGOL

وهذه لغة أحدث قليلا من لغة الفورتران إذ تم استحداثها حوالى عام ١٩٦٠م وذلك بغرض حل المشاكل العلميه والهندسيه ولكن بأسلوب يختلف نسبيا عن لغة الفورتران

ج- لغة الكوبول: COBOL

وهى إختصار لـ Common Business Oriented Language ولقد استحدثت عام ١٩٦٠ وتهدف لحل المشاكل التجارية التى تتسم بحاجتها لاستخدام البيانات الضخمه مثل حساب مرتبات العاملين بوزارة ما. وقد تم تطوير هذه اللغه عدة مرات فى سنوات ١٩٧٤ - ١٩٨٤ حتى تفى بحاجات المجالات التجاريه التى تتطور يوم بعد يوم

د- لغة باسكال: Pascal

وتعد هذه اللغة من أحدث اللغات التى تم استحداثها لتتلائم مع التطبيقات التجاريه بالإضافة إلى أداءها الكفء فى بعض المجالات العلميه وقد تم استحداث هذه اللغة عام ١٩٧١م.

هـ- لغة البيسك : BASIC

وهذه اللغة تم استحداثها عام ١٩٦٥م كلغه مبسطه تصلح لتعليم المبتدئين فى التعامل مع أجهزة الحاسب الآلى وهى تصلح لمختلف المجالات العلميه والهندسيه والتجاريه والإداريه وإن كانت كفاءتها تقل نسبيا عن لغات الحاسب الآلى الأخرى ولذا فإننا نجد أن كلمة BASIC ما هى إلا اختصار للجمله

Beginners All - purposes Symbolic Instruction Code
وتنبع أهميه هذه اللغة إلى ملاءمتها الطاقيه للاستخدام في مختلف مجالات التعليم بمراحله المختلفة كما نجد أنها هي اللغة الرئيسيه لمختلف أجهزة الحاسب الآلي الشخصي.

و- لغه البرامج رقم (١) : PL/1

وهي لغة الاداء العالي في كلا من الأغراض العلميه والتجاريه حيث أنها تجمع بين خواص لغتي الكوبول وفورتران وهي إختصار للتعبير Programming Language one . ونشير هنا ليست بسهولة إستعمال لغة البيسك.

تمارين:

١- ماهو المقصود بلغة الحاسب الآلي.
٢- إذكر باختصار مكونات الحاسب الآلي.
٣- ماهي أهميه خصائص الحاسب الآلي.
٤- فرق بين الأنواع المختلفه للحاسبات الآليه.
٥- أذكر ماتعرفه عن:
(أ) الأجهزه والبرمجيات.
(ب) مجموعة البرامج الجاهزه.
(ج) وحدات التخزين الصلبه.
(د) وحدة التشغيل المركزي
(هـ) وحدة التحكم
(و) إذكر باختصار خطوات استخدام الحاسب الآلي
(ز) اذكر ما المقصود بلغة البيسك - الفورتران - الكوبول

الباب الثانى
النظم العددية "Number System"

تمهيد :-

من الطبيعى أن يتساءل البعض عن كيفية تمثيل البيانات داخل الحاسب الآلى وعن الكيفية التى يستطيع الحاسب الآلى بواسطتها أن يفسر التعليمات والبيانات المعطاة. ووصف الحاسب الآلى بالرقمى تعنى أنه يعالج بيانات بواسطة أسلوب العد للكميات لذلك تحتل النظم العدديه مكانه أساسيه فى لغة التعامل مع الحاسب الآلى. ونظرا لاستخدام الدوائر الإلكترونيه ذات الحالتين التوصيل ON لتمثيل الواحد الصحيح وعدم التوصيل OFF لتمثيل الصفر داخل الحاسب، فإن النظام العددى الملائم لطبيعه الحاسب الآلى الرقمى هو النظام الثنائى Binary System. ولهذا فإنه من الضرورى أن نتعرض لدراسة موضوع النظم العددية وكيفية تمثيل البيانات Data Representation. ونظرا لأن الإنسان خلال رحلته مع الأرقام استخدم كلتا يديه فى العد فقد ظهر ما يسمى بالنظام العشرى Decimal System. ومن الطبيعى أن نستخدم النظام العشرى كمدخل لدراسة باقى نظم الأعداد الأخرى مثل النظام الثنائى - النظام الثمانى octal system - النظام السادس عشر Hexadecimal System.

٢-١: النظام العشرى

لقد تعودنا استخدام النظام العشرى فى التعبير عن أرقام وأعداد معينه. ومن المعروف أن النظام العشرى به عشرة أرقام هى: Digits = {0, 1, 2, 3, 4, ... 8, 9}

وأساس النظام العشرى Base هو عشرة أى أن Base = 10
ولتمثيل العدد 456 مثلاً فإنه يكون على الصورة

$$456 = 6\times10^{0} + 5\times10^{1} + 4\times(10)^{2}$$

$$= 6\times1 + 50 + 400 = 6 + 50 + 400$$

أى أن القيمة المطلقة للعدد 456 بينما هناك قيم للموضع position values فالعدد "6" موضعه 10^{0} أى لواحد لذا فإن موضع العدد "6" يسمى بخانة الآحاد أما العدد "5" يناظر 10^{1} أى عشرة لذا يسمى بخانة العشرات ومن ثم فإن قيمة 5 هى $5\times10 = 50$. أما العدد "4" فموضعه يناظر $(10)^{2}$ أى مائة لذا يسمى بخانة المئات ومن ثم فإن العدد "4" قيمته هى $4\times100 = 400$ ومن ثم فإن قيمة العدد 456 هى:
400+50+2 ... وهكذا. ومن هنا يتضح أن النظام العشرى له خصائص:

١- أنه يستخدم عشرة أرقام هى: $\{0,1,2,3,\dots,9\}$

٢- أساسه هو عشرة Base = 10

٣- قيمة الواحد فى موضع معين تساوى عشرة أمثال قيمته فى الموضع الملازم له من اليمين

٤- تحسب القيمة المطلقة لعدد ما فى النظام العشرى عن طريق ضرب كل رقم فيه فى قيمة موضعه ثم تجمع كل النواتج.

٤-٢: النظام الثنائى Binary System

يستخدم النظام الثنائى نفس مفاهيم النظام العشرى فيما عدا أساس النظام الثنائى هو "2" وأنه يستخدم رقمان فقط اى أن

Base = 2 & Digits = {0,1}

أنظر للعدد الثنائي $(1101)_2$ فإنه يعني ما يلي:

$$(1101)_2 = 1\times 2^0 + 0\times 2^1 + 1\times 2^2 + 1\times 2^3 = 1+4+8 = (13)_{10}$$

العدد الثنائي $(1101)_2$ يساوي فعليا العدد $(13)_{10}$ بالنظام العشري

٢-٤: النظام الثماني: octal system

هذا النظام له مفاهيم الأنظمة العددية مع الأخذ في الاعتبار أن الأساس هو 8 وأن الأرقام المستخدمة هي $0,1,2,\dots,7$ أي أن $\text{Base}=8$; $\text{Digits}=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

فمثلا لحساب القيمة المطلقة للعدد الثماني $(725)_8$ فإننا نجري ما يلي:

$$(725) = 5\times 8^0 + 2\times 8^1 + 7\times 8^2 = 5+16+448$$

وهذه قيمته المطلقة بالنظام العشري $= (469)_{10}$

٣-٤: النظام السادس عشر: Hexadecimal System

والأساس لهذا النظام هو 16 أي أن $\text{Base}=16$ أما الأرقام المستخدمة في $\{0,1,2,\dots,9,A,B,C,D,E,F\}$

حيث أن الرموز A، B، C، D، E، F تعبر عن القيم المطلقة $10,11,12,13,14,15$ على الترتيب.

فمثلا لإيجاد القيمة المطلقة للعدد $(CF59)_{16}$ فإننا نجري الآتي:

$$(CF59)_{16} = 9\times 16^0 + 5\times 16^1 + F\times(16)^2 + C(16)^3$$

$$= 9\times 1 + 5\times 16 + 15\times 256 + 12\times 4096$$

$$= (53081)_{10}$$

أي أن القيمة المطلقة للعدد $(CF59)_{16}$ هي $(53081)_{10}$ في النظام العشري.

٤-٤: كيفية التحويل من النظام العشري لباقي الأنظمة العددية:

ويجدر الإشارة هنا إلى أنه الدراسة في البنود السابقة تهدف إلى تحويل الأعداد الغير عشرية في الأنظمة العددية المختلفة إلى النظام العشري

وذلك عن طريق كتابة العدد في صورة مفكوك للعدد الصحيح بدلالة قوى أساس هذا النظام وبالتالي حصلنا على ما يعرف بالقيمة المطلقة لهذا العدد في النظام العشري . وسوف ندرس الآن التحويل من النظام العشري إلى الأنظمة العددية الأخرى وفي الحقيقة أننا للتحويل من النظام العشري إلى أي نظام آخر فإننا نستخدم الطريقة المعروفة باسم طريقة الباقي Remainder Method وستتضح هذه الطريقة من خلال الأمثلة التالية :

مثل (1) : حول العدد العشري $(149)_{10}$ إلى الأنظمة العددية المختلفة

الحل : أ- التحويل للنظام الثنائي :

		الباقي Remainder
2	149	1
2	74	0
2	37	1
2	18	0
2	9	1
2	4	0
2	2	0
2	1	1
	0	

$= (10010101)_2$

Read ↑

ب- التحويل للنظام الثماني :

		الباقي Remainder
8	149	5
8	18	2
8	2	2
	0	

$= (225)_8$

Read ↑

د- التحويل للنظام السادس عشر:

Remainder الباقي

16 | 149 ⟵ 5
16 | 9 ⟵ 9
0

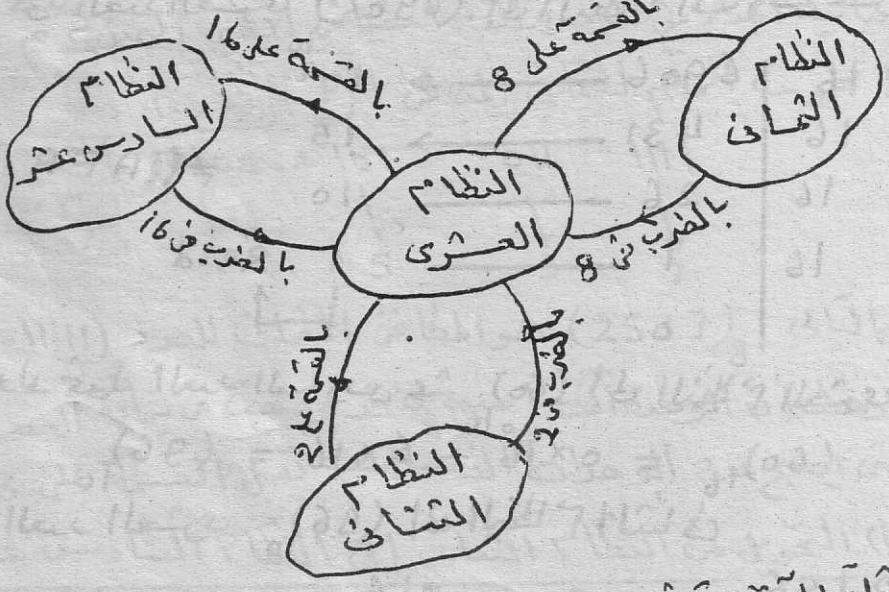
Read ⟵ $= (95)_{16}$

٥-ج: التحويل من نظام عددى لآخر:

توجد طريقتان للتحويل على النحو التالى:

١- الطريقة الغير مباشرة:

تحويل أى من الأنظمة العدديه إلى النظام العشرى ثم التحويل من النظام العشرى إلى النظام العددى المطلوب ويمكن تلخيص ذلك حسب الجدول الآتى



الأمثلة الآتيه توضح هذه الطريقة

مثال (١): (أ) حول العدد الثنائى $(1\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,1)_2$ إلى النظام الثمانى والسادس عشر.

(ب) حول العدد $(65)_{16}$ إلى النظام الثنائى والثمانى

الحل: (أ) حول العدد $(1101011111010)_2$ أولاً إلى النظام العشري:

$$(\quad\leftarrow)_2 = 0\times2^0+1\times2^1\times0\times2^2+1\times2^3+\cdots+1\times2^{12}$$

$$= (6906)_{10}$$

* ثم نحول العدد العشري $(6906)_{10}$ إلى النظام الثماني:

8	6906	⟶	2
8	863	⟶	7
8	107	⟶	3
8	13	⟶	5
8	1	⟶	1 Read
	0		

$= (15372)_8$

** ثم نحول العدد العشري $(6906)_{10}$ إلى النظام السادس عشر

16	6906	⟶	10
16	431	⟶	15
16	26	⟶	10
16	1	⟶	1 Read
	0		

$= (1AFA)_{16}$

(ii) أولاً نحول العدد السادس عشر $(60)_{16}$ إلى النظام العشري:

$$(60)_{16} = 0\times16^0+6\times16^1 = (96)_{10}$$

* نحول العدد العشري $(96)_{10}$ إلى النظام الثنائي

2	96	⟶	0
2	48	⟶	0
2	24	⟶	0
2	12	⟶	0
2	6	⟶	0
2	3	⟶	1
2	1	⟶	1 Read
	0		

$= (1100000)_2$

حول النظام العشرى $(96)_{10}$ إلى النظام الثمانى :

8	96	⟶ 0	
8	12	⟶ 4	$=(140)_8$
8	1	⟶ 1 Read	
	0		

ب - الطريقة المباشرة :

(أ) التحويل من النظام الثنائى إلى الثمانى والسادس عشر:

يمكن التحويل من ثنائى إلى الثمانى والسادس عشر كالآتى

نظام ثنائى ← إلى نظام ثمانى : نقسم مجموعة الأرقام الثنائيه الدالة على العدد الموجود إلى مجموعات ثلاثيه من الأرقام الثنائيه ابتداءً من الوحدة الأساسيه فى أقصى اليمين، ثم نستبدل بكل مجموعة الرقم الثمانى المكافئ له.

$1\times2^0+1\times2^1+1\times2^2+1\times2^3+1\times2^4+0\times2^5+$
$7\times8^0+3\times(2^3=8^1)$

$1\times2^6+0\times2^7+1\times2^8+$
$(2^3=8^2)\times5$
$0\times2^9+1\times2^{10}+0\times2^{11}$
$(2^9=8^3)\times2$

010	101	011	111
↓	↓	↓	↓
2	5	3	7

وبالتالى $(2537)_8$ هو المكافئ الثمانى للعدد $(10101011111)_2$

(لاحظ أن الوحدة الأساسيه 0 قد وضعت فى بداية العدد الثنائى حتى يصبح عدد الوحدات الأساسيه يقبل القسمة على 3)

(ب) التحويل من النظام الثنائى إلى النظام السادس عشر :

نقسم مجموعة الأرقام الثنائيه الدالة على العدد الموجود إلى مجموعة رباعيه من الأرقام الثنائيه ابتداءً من الوحدة الأساسيه فى أقصى اليمين، ثم نستبدل كل مجموعة الرقم السادس عشر المكافئ له :

حول العدد الثنائي $(10010101)_2$ إلى ما يكافئه من النظام السادس عشر :

1001 0101
9 5

$\therefore (10010101)_2 = (95)_{16}$

(iii) التحويل من ثماني إلى النظام الثنائي :

نستبدل كل رقم ثماني المكافئ الثنائي المكون من ثلاث وحدات اساسيه كما يلي :

حول العدد الثماني $(4206)_8$ إلى ما يكافئه من النظام الثنائي :

4 2 0 6
↓ ↓ ↓ ↓
100 010 000 110

وبالتالي فان $(100010000110)_2$ هو المكافئ للعدد الثماني $(4206)_8$

(iv) التحويل من سادس عشر إلى النظام الثنائي :

يتم إجراء هذا التحويل تماما كما في (iii) إلى أنه نستبدل مكافئات لوحدات رباعيه اساسيه

العدد الكلي	التحويل الثنائي
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A=10	1010
B=11	1011
C=12	1100
D=13	1101
E=14	1110
F=15	1111

جدول التحويل الثنائي

٦-٢: طريقة أخرى للتحويل من ثنائى إلى عشرى:

هذه الطريقة صالحة فقط للأعداد الثنائيه الصحيحه وهى تعرف بطريقة هورنر. ويمكن توضيحها بالمثال الآتى

مثال: حول العدد الثنائى $(11\,01\,01)_2$ إلى النظام العشرى

الحل: ضاعف أول رقم (أقصى اليسار) ثم اجمع الناتج على الرقم التالى على اليمين. ضاعف المجموع ثم أضف الناتج إلى الرقم التالى. كرر هذه العمليه حتى يجمع الرقم الأخير (أقصى اليمين) المجموع النهائى هو المكافئ العشرى المطلوب. بتطبيق هذا على العدد 11 01 01 كالآتى

1	1	0	1	0	1
+	2	6	12	26	52
3	6	13	26	(53)	

المكافئ العشرى هو $(53)_{10}$

٦-٣: تحويل النظام العشرى فى صورته العامة إلى النظام الثنائى:

يكون العدد العشرى N يتكون من جزئيه أحدهما الجزء الصحيح N_I وجزئه الثانى كسرى N_F على الصورة $N=N_I+N_F$ ولتحويله إلى النظام الثنائى نعمل على تحويل كل جزء على حدة. و سوف نوضح ذلك بالمثال الآتى:

مثال: حول العدد العشرى 109.78125 إلى مكافئه الثنائى.

N_I N_F

الحل: (أ) تحويل $N_I = 109$ إلى مكافئه الثنائى:

نستخدم الطريقة السالفة الذكر وهى نظام القسمة على 2 واتباع نظام الباقى فنجد أن $(109)_{10} = (1101101)_2$

From dinary to binary $N_I \cdot N_F$ ① ← Look

divide by 2^n | multiply by 2^n

(أ) تحويل $N_F = 0.78125$ إلى النظام الثنائي :

نتبع الخطوات التاليه : الجزء الصحيح | الضرب

$0.78125 \times 2 = 1.56250$ — 1

$0.56250 \times 2 = 1.1250$ — 1

$0.1250 \times 2 = 0.250$ — 0

$0.250 \times 2 = 0.50$ — 0

$0.50 \times 2 = 1.00$ — 1

From binary to dinary

$N_I \cdot N_F$ ②

multiply by 2^n | divide 2^n Look

تنتهي الخطوات عندما يكون الجزء الكسري هو الصفر .

multiply by 2^n ∴ $N_F = (0.11001)_2$ multiply by 2^{-n}

∴ $N = (110\,1101.11001)_2$

read | read

ملحوظة : يمكن صياغة عملية الضرب السابقة في الصورة :

0.78125

× 2

1.56250

× 2

1.1250

× 2

0.250

× 2

0.500

× 2

1.000

نلاحظ أن الجزء الكل ناتج حاصل ضرب إذا كان صحيحا لا يدخل في عملية الضرب التاليه

مثال (٥) : حول $(13.6875)_{10}$ إلى نظيره الثنائي

الحل :

2 | 13 → 1
2 | 6 → 0
2 | 3 → 1
2 | 1 → 1
0

0.6875 × 2 = 1.3750 / 0.7500 × 2 / 1.50 × 2 / 1.00

-cc-

وبالتالى فإن $(13.6875)_{10} = (1101.1011)_2$

ملحوظة: المكان الثانى للكسر عشرى مثلا ليس دائما كسرا ثنائيا منتهيا. فمثلا تحويل $(0.6)_{10}$ إلى النظام الثنائى:

$0.6 \times 2 = 1.2$ ← 1

$0.2 \times 2 = 0.4$ ← 0

$0.4 \times 2 = 0.8$ ← 0

$0.8 \times 2 = 1.6$ ← 1

عند هذه المرحلة فإن الطريقة تعود إلى ضرب 0.6 فى 2 وهذا يعنى أن الخطوات الأربع السابقة سوف تتكرر، أى أننا سوف نحصل على الوحدات الأساسية السابقة مرة بعد مرة أى أن $(0.6)_{10} = (0.\overline{1001})_2$

ويمكن التحقق من ذلك رياضيا كالآتى

$$(0.\overline{1001})_2 = (1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-4}) + (1\times 2^{-5} + 1\times 2^{-8}) + (1\times 2^{-9} + 1\times 2^{-12}) + \cdots$$

$$= (1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-4})\left[1 + 2^{-4} + 2^{-8} + \cdots\right] =$$

والمقدار بين القوسين المربعين هو متوالية هندسية لانهائية أساسها 2^{-4} وبالتالى فإن:

$$(0.\overline{1001})_2 = (2^{-1} + 2^{-4})\ \frac{16}{15} = \frac{8}{15} + \frac{1}{15} = \frac{9}{15} = 0.6$$

٨-ج: عمليتى الجمع والضرب الثنائى:

أساس تنفيذ الحسابات العددية هو نفسه فى جميع نظم الترقيم المعتمدة على المكان.

١- الجمع الثنائى:

تذكر الطالب أولا الجمع فى النظام العشرى. إن الجمع لعددين عشريين

يتم طبقا للنظام الحسابى ذى الخطوات الثلاث التالى :

الخطوة الاولى : اجمع أول عمود على اقصى اليمين

الخطوة الثانيه : سجل رقم جمع العمود . إذا زاد الجمع عن 9 نرحل رقم العشرات "1" إلى العمود التالى

الخطوه الثالثه : إذا كان هناك احمد أكثر أو إذا كان هناك رقم مرحل من الخطوه 2 ، اجمع العمود التالى وكرر الخطوة الثانيه

فمثلا

1 1	المرحل
34572	المضاف إليه
+42862	المضاف
79434	

حيث أننا فى هذه العمليه نجمع رقمين عشريين

فعلى سبيل المثال لن يزيد مجموع أى عمود ، حتى فى حالة الترحيل من العمود السابق عن "9" وبالتالى فإن رقم العشرات فى المجموع لن يزيد عن 1.

ومن حسن الحظ أن النظام الحسابى ذات الخطوات الثلاث لجمع الأعداد العشرية يصلح أيضا لجمع الأعداد الثنائيه إذا أحللنا "1" محل "9" و "2" محل "10" فى الخطوه الثانيه .

(أ)

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1 + 0 = 1
1 + 1 = 0
1 + 1 + 1 = 1

يوضح حقائق الارقام الثنائيه

(ب)

+	0	1
0	0	1
1	1	0

يوضح جمع الارقام الثنائيه

مثال (1) : احسب حاصل الجمع الثنائى

1 1 1 0 1 1 0 1 + 1 0 1 1 1 0 0 1

الحل : سوف نتبع الخطوات الثلاث السالفة الذكر :

المرحل	1 1 1 1 1 1 1
المضاف اليه	1 1 0 0 1 1 1 0 1
المضاف	+ 1 0 1 1 0 1 1 1
	1 0 0 1 0 1 0 1 0 0

مثال (٢): ٢- احسب حاصل الجمع ١٥١١ + ١١٥ + ١١٥١ + ١٥٥١

الحل: أولا نجمع العددين الأول والثانى ثم نجمع الثالث ثم الرابع للحصول على المجموع النهائى كما يلى:

العدد الأول	1 0 0 1
+ " الثانى	1 1 0 1
المجموع	1 0 1 1 0
العدد الثالث	1 1 5
المجموع	1 1 1 0 5
العدد الرابع	1 0 1 1
المجموع النهائى	1 0 0 1 1 1

ب- احسب ١١٥١.٠١ + ١٥١.١١٥١

الحل: يتم الجمع كما فى حالة الكسور العشرية أى أن

	1 1 0 1 . 1 0 1
+	1 0 1 . 1 1 0 1
	1 0 0 0 1 . 0 0 0 1

ب- الضرب الثنائى:

لنتذكر أن ضرب الأعداد العشرية يمكن إختزاله إلى ضرب أعداد فى أرقام ثم الجمع. فمثلا لحساب 1234×253 نضرب أولا فى الأرقام 2, 5, 3 ثم نجمع صفوف الأعداد الناتجة:

```
      1   2
    1 1   1
    1 2 3 4
  x     2 5 3
  -----------
    3 7 0 2
    6 1 7 0
  2 4 6 8
  -----------
  3 1 2 2 0 2
```

و قواعد الضرب العشرى تنطبق أيضا على الضرب الثنائى . وهى الواقع فإن الضرب الثنائى أبسط ، إذ أن الضرب لعدد ما فى "0" أو "1" يعطى على الترتيب 0 أو العدد نفسه .

مثال (١٣) : أ- لحساب حاصل الضرب 1101011×10110

الحل :

```
    1 1 0 1 0 1 1
  x   1 0 1 1 0      الصفر الأول
  -----------
  1 1 0 1 0 1 1 0    اول حاصل ضرب
  1 1 0 1 0 1 1      ثانى حاصل ضرب
  -----------
  1 0 1 0 0 0 0 1 0  المجموع
  1 1 0 1 0 1 1      ثالث حاصل ضرب
  -----------
  1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 المجموع النهائى
```

ب - لحساب حاصل الضرب 11.01×101.01

الحل :

```
      1 1 . 0 1
    x 1 0 1 . 0 1
    -------------
        1 1 0 1
      1 1 0 1
    -------------
    1 0 0 1 1 1
  1 1 0 1
  -------------
  1 0 0 0 1 . 0 1 1 1
```

the basic processing mechanism

٩-٢ : عمليتى الطرح الثنائى والقسمة الثنائيه :

سوف نوضح فى هذا البند هاتين العمليتين الحسابيتين فى النظام العشرى وكيفيه التطبيق فى النظام الثنائى

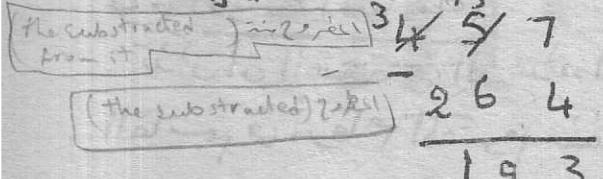
١- الطرح الثنائى :

يمكن اجراء الطرح فى النظام العشرى باستخدام النظام الحسابى ذى الخطوتين التاليتين :

الخطوة (أ) : إذا كان الرقم السفلى (المطروح) أكبر من الرقم العلوى (المطروح منه) نستعير "١" من العمود التالى إلى اليسار (القيمة المستعارة تساوى ١٥) .

الخطوة (ب) : الاستعارة أو السلف تعنى دون أى التزام بالاستعارة مع أن القيمة المستعارة هى ١٥ إلا أن العمود المستعار منه يقل "١" فقط.

فمثلا



وحقائق الطرح المطلوبه للنظام الحسابى ذى الخطوتين تتكون من الفروق بين كل رقم ورقم أكبر منه ، والفروق بين كل رقم ورقم أصغر منه مضافا إليه "١٥" . أما فى حالة الطرح الثنائى نستخدم النظام الحسابى ذا الخطوتين . لكن من ذلك فان حقائق الطرح الثنائى التى تحتاجها هى المذكورة فى هذا الجدول . الحالات الثلاث الأولى هى ترجمة لحقائق الجمع ١+١=١٠ ، ١+٠=٠+١=١ ، ٠+٠=٠ أما الحالة الرابعة بالجدول فنحصل عليها من :

٠-٠=٠	
١-٠=١	
١-١=٠	
١-٠=١ استعير 1	

$A > B \Rightarrow A-B = +M$
$B-A = -M = -(A-B)$

$10 = 1+1$ وبالتالى $1 = 1-10$ أى أن الفرق "1-" يحتاج يحتاج إلى الاستعارة والتى تعطى $1 = 1-10$

مثال (٤): أ- إحسب الفرق $11001001 - 110110110$

الحل:

$$\begin{array}{r} 11001001 \\ - \quad 110110110 \\ \hline 10111100011 \end{array}$$

ب- إحسب الفرق $1101.1011 - 11.1111$

الحل: كما فى حالة الكسور العشرية فإننا يجب أن نضع علامات الكسور الثنائية على نفس الخط الرأسى قبل بدأ الطرح

$$\begin{array}{r} 1101.1011 \\ - \quad 11.1111 \\ \hline 1001.1100 \end{array}$$

ب- القسمة الثنائية:

تذكر أن القسمة فى الأعداد العشرية يمكن إختزالها إلى ضرب القاسم فى أرقام المقسوم منفردة والطرح. فمثلاً

(the dividing) القاسم

(the divided) المقسوم

$$\begin{array}{r|l} 42558 & 123 \\ -369\,00 & 346 \\ \hline 5658 & \\ -492\,0 & \\ \hline 738 & \\ -738 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

هنا 123 هو القاسم، نضربه فى 3 ثم نطرح حاصل الضرب 369 من 425 ثم نضرب 123 فى 4 ونطرح حاصل الضرب 492 من 565 وأخيراً نضرب 123 فى 6 ونطرح 738 من 738 فنحصل على الباقى 000.

= ويتضح من هذا أن ما نفعله هو أولاً طرح $3\times(10)^2$ مضاعف

القاسم من المقسوم، ثم طرح 4×10 مضاعف القاسم من المتبقى ثم طرح "4" أضعاف القاسم من المتبقى. عند هذه المرحلة يكون المقسوم قد استهلك، وذلك يوضح أن المقسوم يحوى القاسم عددا من المرات هو $3\times(10)^2+4\times(10)^1+6=346$.

النظام الحسابى السابق يمكن تطبيقه فى حالة القسمة الثنائية وفى الحقيقة فإن ضرب القاسم فى الرقم الوحيد غير الصفرى "1" لا يغير العدد، وبالتالى فإن النظام الحسابى للقسمة يختزل إلى عملية تكرار الطرح للقاسم (مضاعف لقوى 2)

مثال (5): أجب $10101001 \div 11$

الحل: نجد أن خارج القسمة هو 11011

11	10101001
	11
	100
	11
	0100
	11
	11
	11
	0

وكما فى قسمة الأعداد الصحيحة العشرية فإن ظهور الباقى يحتمل حدوثه فى حالة قسمة الأعداد الصحيحة الثنائية. أيضا فإن عملية قسمة الكسور الثنائية يمكن معالجتها بنفس الطريقة كما فى قسمة الكسور العشرية، أى أنه، يمكن تحويل القاسم إلى عدد صحيح بتحويل العلامة الثنائية فى كل من القاسم والمقسوم بنفس عدد الأماكن.

مثال (6): أ- أجب $1111111 \div 1001$

الحل: خارج القسمة 1101

والباقى 10.

1001	1111111
	1001
	1111
	1001
	110

$(10)^{-10}$

٥- احسب ١٠١ ÷ ١١١٠٠٥٥١

الحل:

يتضح ان خارج القسمة ١٠١.١٠١

```
      1011.101
    ------------
101 | 11100.001
      101
    -----
      1000
       101
    -------
       1100
        101
    -------
        111
        101
    -------
         101
         101
    -------
           0
```

where (n) is the number of digits of (A)

$$-A=\left[(9\text{"n" time}-A_n)-10^n\right]+1$$

$$-A=(9\text{"n" time}-A_n+1)-10^n$$

١٠-٤: المكملات:

تظهر المكملات الحسابيه فى حالتين منفصلتين ولكن يوجد بينهما علاقة فى نظم عشرين (I) الاعداد فى الحاسب الآلى فبينما يستخدم الانسان إشارتى - ، + للدلالة على الاعداد السالبه والموجبه فى الحاسب يعالج البيانات فقط فى صورة وحدات اساسيه ومع أنه يمكن تخصيص وحدة أساسيه للدلالة على إشارة العدد (٥ عن اشارة "+" ١ عن إشارة "-" مثلا) فإن عددا كبيرا من الحاسبات تخزن الاعداد السالبه فى صورة مكملات الحسابيه وتظهر المكملات أيضا فى عمليه (II) الطرح حيث يمكن استخدام المكملات لتحويل عمليه الطرح إلى عمليه الجمع وهذا مفيد لأنه يتجنب عمليه الاستعارة المتكرره من عمود لآخر.

والمكملات نوعان هما: مكمل الاساس ناقص واحد ومكمل الاساس (يلاحظ ان استخدام التعبير "مكمل" بمفرده سوف يعنى عاده مكمل الاساس). وسندرس هذين المكملين فى النظام العشرى على الترتيب وهما مكمل التسعات ومكمل العشرات

ثم نقوم بدراسة هذه العملية في النظام الثنائي .

٢- المكملات في النظام العشري :

لنفرض أن A عدد عشري . مكمل التسعات للعدد A يمكن الحصول عليه بطرح كل رقم من أرقام A من "9" . ومكمل العشرات للعدد A هو مكمل التسعات مضافا إليه 1 . فمثلا

العدد العشري	5672901	7129	A = 4308
مكمل التسعات	4327098	2870	B = 5691
مكمل العشرات	4327099	2871	B+1 = 5692

لتوضيح كيفية استخدام المكملات في الطرح ، نفرض أن A<B عددان عشريان صحيحان لهما نفس العدد من الأرقام ، ولنفرض أنه A أصغر من B ، الفرق Y = B - A يمكن إعادة كتابته كما يلي

$$Y = B - A + (999999 + 1 - 100000)$$

$$= \overset{①}{B} + (999999 \overset{②}{-} A + 1) - 100000$$

$$= \overset{①}{B} + [(999999 - A) \overset{②}{+} 1] - 100000$$

(مكمل التسعات ③ ، مكمل العشرات ④ ، ③)

وبعبارة أخرى ، يمكن حساب Y إما بإضافة مكمل العشرات للعدد A إلى العدد B أو إضافة مكمل التسعات للعدد A إلى العدد B ثم إضافة "1" . وفي كلتا الحالتين يجب أن نطرح 100000 ؛ ولكن حيث أن B، A يتكون كل منهما من ستة أرقام فإن طرح 100000 يعني ببساطة حذف آخر "1" من جهة اليسار في المجموع النهائي .

ومع أن عملية حساب الفرق Y باستخدام المكملات تحتاج إلى أربع عمليات حسابية إلا أنها لها ميزة هامة وهي أننا لا نحتاج إلى الاستعارة في إيجاد مكمل التسعات .

مثال (٧) : إحسب الفرق $Y = B - A$ حيث $A = 4816$ & $B = 6142$

الحل : ١- باستخدام طريقة الطرح العادية :

نلاحظ أننا إحتجنا إلى الاستعارة مرتين

```
  6142
- 4816
------
  1326
```

ب- نجمع مكمل التسعات للعدد A وهو 5183 .

ثم نحذف الرقم "1" الأخير (هذا يكافئ طرح ١٠٠٠٠) ، وبعدئذ نضيف "1" إلى المجموع

```
  6142
+ 5183
------
 (1)1325
    →1
------
  1326
```

ج- نجمع مكمل العشرات للعدد A

وهو $5183 + 1 = 5184$

والآن ببساطة نحذف الرقم "1" الأخير للحصول على الحل

```
  6142
+ 5184
------
 (1)1326
```

ملحوظة (١) :

الشرط أن كلا من A & B يكون له نفس العدد من الأرقام ، لا يمثل قيدا حقيقيا حيث أنه يمكن إدخال أصفار في بداية العدد ، عند الضرورة ، لتحقيق هذا الشرط . وفي الحقيقة فإن كثيرا من الوسائل الحاسبية ، ومن بينها الكثير من الحاسبات ، تستخدم أماكن للتسجيل وأخرى للتخزين لها سعة ثابتة من الأرقام . في مثل هذه الوسائل "الرقم 1" الأخير ، والمطلوب حذفه ، يحذف تلقائيا .

مثال (٨) : نفرض أنه أماكن التسجيل في آلة حاسبة ميكانيكية عادية ، سعتها فقط ثمانية أرقام عشرية ، ولنفرض أن الآلة

تطرح العدد باضافة مكمل العشرات له. إذا كانت عليه جمع تنتج أكثر من ثمانيه أرقام فإن آخر رقم يفقد. فإذا أعطينا B = 563 ، A = 216 وكان المطلوب حساب الفرق Y = B - A فإن العددين A ، B يظهران في أماكن التسجيل كما يلي

B	0	0	0	0	0	5	6	3
A	0	0	0	0	0	2	1	6

وأثناء عملية الطرح فإن محتويات أماكن التسجيل تظهر كما يلي

B	0	0	0	0	0	5	6	3
مكمل A	9	9	9	9	9	7	8	4
الفرق	1	0	0	0	0	0	3	4	7

look
it is supposed that 10^8 is to be substracted from (I), but since we can't put (10^8) on the monitor of the Calculator, thus we can think the loss of the (1) in the 9th place as substracting 10^8 from (II)

ويلاحظ أن الرقم الأخير فقد تلقائيا.

ملحوظة (٢):

الفيضان الحاسبي هو عبارة عن جزء النتيجة المفقود لزيادة القيمة الناتجة عن سعة أماكن التخزين. وفي عملية الطرح فإن الفيضان الحاسبي ينتج دائما عندما يكون A < B ونضيف مكمل A إلى B

look

ملحوظة (٣):

نفرض أن A > B . فمثلا B = 2148 ، A = 5872 فيكون الفرق Y = B - A = 3724 - . باضافة مكمل A إلى B نحصل على:

2148
+ 4128
6276

ونلاحظ أنه في هذه الحالة لا يوجد "رقم 1" أخير مطلوب حذفه (وهو الحالة التي عندها A>B دائما). وبالتالي نحتاج إلى طرح 10000 من 6276 (زيادة)، وبعبارة أخرى مكمل العشرات للمجموع 6276 مأخوذا بإشارة سالبه هو الفرق المطلوب: 3724-

د- المكملات في النظام الثنائي

إن أساس ومعنى المكمل في النظام العشري يمكن تحويلها إلى النظام الثنائي. وبطريقة أكثر تحديدا، إذا كان A عددا ثنائيا فإن مكمل الواحدات للعدد A يمكن الحصول عليه بطرح كل رقم (من أرقام A) من 1. ومكمل الإثنينات للعدد A هو مكمل الواحدات مضافا إليه 1. فمثلا

العدد الثنائي	11001001	11110000 1111
مكمل الواحدات	00110110	00001111 0000
مكمل الإثنينات	00110111	00001111 0001

نلاحظ أن مكمل الواحدات ببساطة يعكس كل رقم، أي أن "1" يحل محله "0" و "0" يحل محله "1".

وكما في حالة النظام العشري يجري عمليه الطرح الثنائي بإضافة مكمل الواحدات مضافا إليه "1" أو باضافة مكمل الإثنينات.

مثال (٩): احسب الفرق A - B = Y حيث A=10001110; B=11110000

الحل: ١- يجرى الطرح الثنائي العادي

	B	11110000
	A	10001110
	Y	01100010

ونلاحظ أن البستكارة سوف تمتد حتى الرقم الثالث إلى اليسار.

the substracted number is written in the system's own digits and consistes of 1 one (1) and in front of it (n) zeros where (n) = its number of digits (n)

Book

ب- مكمل الواحدات للعدد A هو B
11110000
+ 00001111
11111111
مكمل 1 A
نجمع هذا المكمل على B ثم نضيف "1"
11110000
+ 00001111
(1) 00000000
→ 1
00000001
Y

د- مكمل الاثنينان للعدد A
وهو 00001111 . نجمع B: 11110000
هذا المكمل على B مكمل A
00001111
(1) 00000000
Y

وبحذف الرقم "1" الاخير من اليسار ⇐ Book
(والذى هو فيضان حاسبى فى حالة أماكن التخزين ذات ثمانى وحدات اساسية) نحصل على الفرق Y .

مثال (10): أوجد الفرق A - B = Y حيث A=110011, B=101010
الحل: باضافة مكمل الاثنينان
A consists of 6 digits = n
للعدد A إلى B نحصل على: B 101010
+ مكمل A 001101
Z 111111
نلاحظ أنه لا يوجد "1" فى المكان السابع لحذفه وبالتالى فان Z ليس هو الفرق Y.
والسبب فى ذلك هو أن A اكبر من B. لايجاد Y يجب طرح 1000000 من Z. بعبارة أخرى مكمل الاثنينان للعدد Z ماخوذا باشارة سالبه أى 000001 - .
Y = (10)Z

تمارين

1- أوجد قيمة المكان للوحدة الثنائية التى تحتها خط:
(i) 111000 ، 111000111 ، 111000.111
(ii) 111.001 ، 111.110 ، 1.101

2- اكتب فى صورة المكمل كلا من 11.0001 ، 11100111

٣- حول كل من الأعداد الثنائية إلى كل من النظام العشري - الثماني - السادس عشر

١١٠٠١١ ، ١٠١٠١٠١٠١ ، ١١١٠١١٠ ، ١١١٠٠٠١١١

٤- حول كل من الأعداد العشرية الآتية إلى المنظمة الأخرى

0.390625 ، 124.625 ، 91.08 ، 0.3 ، 2856 ، 694

٥- أوجد ما يلي :

(i) ١١١ + ١١٠١ ؛ ١١٠٠١١ + ١٠١١٠١ ؛ ١٠١١٠١١٠١ + ١٠١١٠١

(ii) ١١٠٠١١ + ١٠١١ + ١١١٠٠ + ١١٠٤١

(iii) ١١٠١٠١ + ١١٠٠٠١ + ١١١٠١٠١ + ١١٠١.١

٦- أوجد حواصل الضرب الثنائية الآتية:

(i) ١١١٠١١ × ١٠١١ ؛ (ii) ١١ × ١١١٠١١١ . (iii) ١١٠٠١٠١ × ١١٠٠١٠١

٧- أوجد الفروق الثنائية التالية بطرق عديدة

(i) ١١٠٠٠١١ - ١١٠١١١ ؛ (ii) ١٠١٠١٠١٠١ - ١١٠٠١١

(iii) ١١٠٠٠٠١ - ١١٠٠١١١ ؛ (iv) ١١٠١ - ١١٥

(v) ١٠١٠١ - ١٠١١٠٠١ ؛ (vi) ١٠١١٠٠١ - ١١٠١١ (vii) ١١٠٠٠٠١٠ - ١٠١١

٨- أوجد مكملات التسعات والعشرات للأعداد العشرية

78923019 ؛ 453800 ؛ 3201

٩- إذا كانت الأعداد في المسألة (٨) تعني لآلة حاسبة عشرية ذات 8- أماكن فأوجد مكمل التسعات ومكمل العشرات في هذه الآلة

١٠- أوجد خوارج القسمة الثنائية :

١١ ÷ ١٠١١ ؛ ١٠١ ÷ ١٠٠٠٠٠١ ؛ ١١١ ÷ ١٠١١٠١١

١١- أوجد مكمل و الواحدات وكذا الثنيان للأعداد الثنائية

١٠١١١٠١ ؛ ١٠٠٠١٠٠٠ ؛ ١١٠٠١١

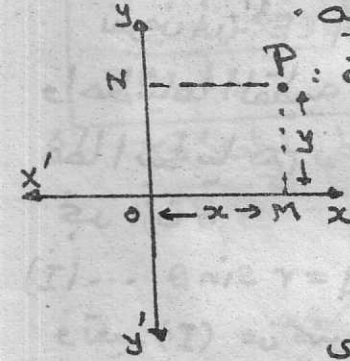
الباب الأول

التمثيل والتحويلات

بند (1): الإحداثيات الكارتيزيه والقطبيه:

أول من أوجد طريقة تربط بين الهندسة والجبر هو الفيلسوف والرياضي الفرنسي ديكارت وكان لطريقته فضل كبير في امكان حل مسائل الهندسة بطرق أسهل وأيسر وقد سميت طريقة ديكارت هذه بالهندسة التحليليه وهي تعتمد أساسا على تعريف الإحداثيات.

وسوف ندرس في هذا البند نوعين من الإحداثيات هما الإحداثيات الكارتيزيه المتعامدة والإحداثيات القطبيه.



أولا: الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة:

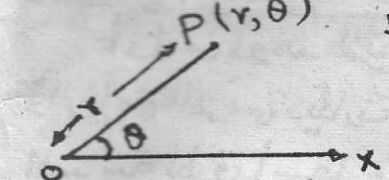
لتحديد مواضع النقط في مستوى معين نختار مستقيمين ثابتين فيه متقاطعين على التعامد فمثلا $y'oy, x'ox$ ويسمى هذان المستقيمان بمحوري الإسناد الأفقي والرأسي على الترتيب وكما تعرف نقطه تقاطعهما "o" بنقطه الأصل.

فإذا كانت P أي نقطه في مستوى هذين المستقيمين فإن موضع P في المستوى يتحدد إذا علم في المقدار والإشارة بعدها عن محوري الإسناد أي إذا علم oM, oN ويرمز عادة للطوليه oM, oN بالرمزين y, x على الترتيب وتسمى هذه بإحداثيات النقطة P والتي يرمز لها بالرمز $P(x,y)$ كما يرمز لهذا المستوى بالرمز E^2.

ثانيا: الإحداثيات القطبيه:

إذا كانت o نقطة ثابته في "E^2" تسمى القطب وكان ox

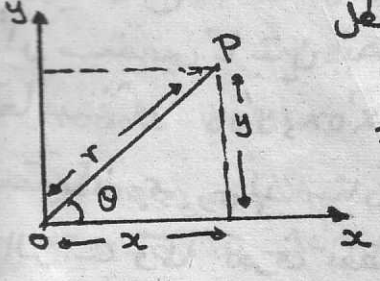
مستقيما ثابتا مارا بها يسمى الخط الابتدائي فإن أي نقطة P في E^2 تتحدد موضعها إذا علم طول المستقيم OP وقدار الزاوية $\angle XOP$ أي أن:



إذا رمزنا للطول OP بالحرف r
والزاوية $\angle XOP$ بالرمز θ
فإن النقطة P يرمز لها بالرمز $P(r,\theta)$. يسمى r بالبعد القطبي للنقطة P وتسمى θ بالزاوية القطبية لها.

ثالثا: العلاقة بين التمثيلين:

نفرض أن $P \in E^2$ إحداثياها بالنسبة لمحورين متعامدين (x,y) وإحداثياها القطبية على اعتبار نقطة الأصل قطبا والمحور ox محورا ابتدائيا هي (r,θ). من الشكل نجد أن:



$$x = r\cos\theta \; ; \; y = r\sin\theta \quad \ldots (I)$$

ونعبر (I) عن صورة التحويل من

$$(r,\theta) \longrightarrow (x,y) \quad .$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \; , \; \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \ldots (II)$$

ونعبر (II) عن صورة التحويل من

$$(x,y) \longrightarrow (r,\theta) \quad .$$

أمثلة توضيحية:

مثال (1): أوجد الإحداثيات الكارتيزية للنقطة $P(2,-60^\circ)$

الحل: باستخدام التحويل (I) نجد أن

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos(-60^\circ) = 2.\frac{1}{2} = 1 \\ y &= 2\sin(-60)^\circ = -2.\sqrt{3}/2 = -\sqrt{3} \end{aligned}\right] \Rightarrow P(1,-\sqrt{3})$$

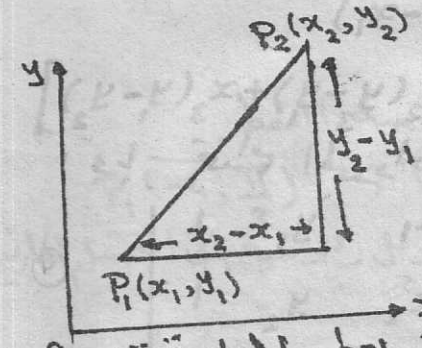
مثال (٢): أوجد التمثيل القطبي للنقطة $P(-2, 2\sqrt{3})$

الحل: باستخدام التحويل (II) نحصل على

$$r = \sqrt{4+12} = 4$$
$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 120^\circ \Rightarrow$$
$$P(4, 120^\circ)$$

بند (٢): البعد بين نقطتين:

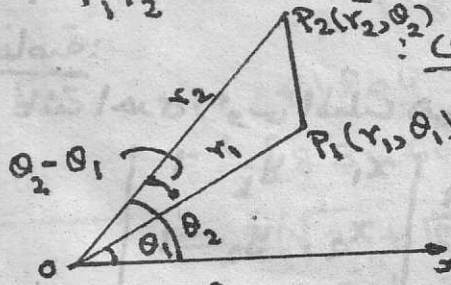
(أ): بدلالة التمثيل الكارتيزي:



بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث المبين بالشكل نجد أن البعد بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ & $P_2(x_2, y_2)$ يعطى بالعلاقة:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad ②$$

(ب): بدلالة التمثيل القطبي:

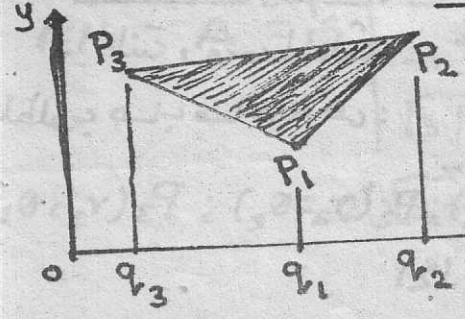


نجد أن البعد بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$; $P_2(r_2, \theta_2)$ يعطى بالعلاقة

$$\overline{P_1P_2}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1) \quad ③$$

بند (٣): مساحة المثلث بمعلومية رؤوسه:

١- في حالة التمثيل الكارتيزي:



نفرض أن النقط $P_1(x_1, y_1)$; $P_2(x_2, y_2)$; $P_3(x_3, y_3)$ هي رؤوس المثلث المعنى

* من الشكل نجد أن :

مساحة $\Delta P_1P_2P_3$ = مساحة شبه المنحرف $P_3P_2q_2q_3$ - مساحة شبه المنحرف $P_1P_2q_2q_1$ - مساحة شبه المنحرف $P_3P_1q_1q_3$:

$$\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_2-x_3) - \frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_1-x_3)$$
$$- \frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_2-x_1)$$
$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]$$

وباستخدام المحددات يمكن وضع هذه المساحة على الصورة

$$\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (٧)$$

حالة خاصة:

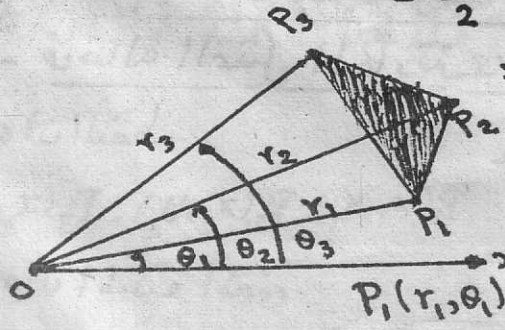
إذا كانت احدى رؤوس المثلث هى نقطة الاصل ولتكن P_3 فان

$$\Delta P_1P_2O = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

ب- فى حالة التمثيل القطبى :

اذا كانت رؤوس المثلث

المطلوب حساب مساحته هى :



$P_1(r_1,\theta_1)$; $P_2(r_2,\theta_2)$; $P_3(r_3,\theta_3)$

فمن الشكل نجد أن

$$\Delta P_1P_2P_3 = \Delta oP_1P_2 + \Delta oP_2P_3 - \Delta oP_1P_3$$

$$= \frac{1}{2}[r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1) + r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2) \quad (5)$$

$$- r_1r_3\sin(\theta_3-\theta_1)]$$

وهي مساحة المثلث المطلوب .

أمثلة توضيحية

مثال: احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقط

$P_1(-4, \frac{\pi}{3})$; $P_2(2, \frac{2\pi}{3})$; $P_3(1, \frac{\pi}{6})$

ثم أحسب مساحة نفس المثلث عند تحويل رؤوسه إلى التمثيل الكارتيزي .

لاحظ أخذنا الترتيب التصاعدي حتى تكون مساحة كل مثلث موجبة & جمعنا مساحات المثلثات ودنيه هو شكل المثلث الذي يجمع مساحات ثلاث مثلثات

الحل:

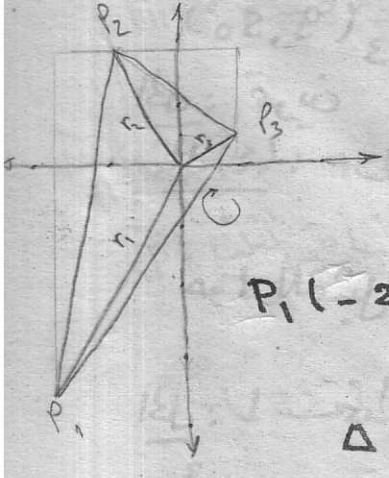
$$\Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}[-4\times 2\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3})$$

$$+2\times 1\sin(\frac{2\pi}{3}-\pi/6)$$

$$+1\times -4\sin(\pi/6-\pi/3)]$$

$$= \frac{1}{2}[8\sin 60^\circ + 2\sin 90^\circ + 4\sin 30^\circ]$$

$$= 2(\sqrt{3}+1).$$



باستخدام التحويل (I) نجد أن

$P_1(-2, -2\sqrt{3})$; $P_2(-1, \sqrt{3})$; $P_3(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

∴ مساحة المثلث تساوي

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -2\sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(\sqrt{3}+1).$$

* شرط وقوع ثلاث نقط على استقامة واحدة :

نفرض أن النقاط الثلاث هى

$P_1(x_1,y_1)$; $P_2(x_2,y_2)$; $P_3(x_3,y_3)$

يقال أنها تقع على استقامة واحدة إذا كانت مساحة المثلث الذى رؤوسه تلك النقط تساوى صفرا أى أن :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

مثال (٢) : إثبت أن مساحة المثلث الذى رؤوسه النقط :

$P_1(\alpha^2,\alpha)$; $P_2(\beta^2,\beta)$; $P_3(\gamma^2,\gamma)$ تساوى

$$\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

الحل : تمرين

مثال (٣) : اثبت أن مساحة المثلث الذى رؤوسه النقط

$P_1(0,0)$; $P_2(6,20^\circ)$; $P_3(9,50^\circ)$ تساوى $\frac{27}{2}$.

الحل : تمرين

مثال (٤) : حول للتمثيل الكارتيزى المعادلة

(i) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

حول للتمثيل القطبى المعادلة

(ii) $x^3 = y^2(2-x)$

الحل : باستخدام التحويل (III) نجد أن :

$$x^2 + y^2 = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad \times r^2$$

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)$$

$$= a^2(x^2 - y^2)$$

وهى الصورة المطلوبة فى (i).

-٢-

للتمثيل القطبي استخدم التحويل (I) :

$x^3 = y^2(2-x)$ $\quad -(1-\cos^2\theta)$

$r^3\cos^3\theta = r^2\sin^2\theta\,(2 - r\cos\theta) \Rightarrow$

$r\cos\theta = 2\sin^2\theta$

وهي المعادلة المطلوبة .

تمارين (1)

(1)- حول المعادلات الآتية إلى صورها القطبية :

(i) $y^2 = 4ax$; (ii) $x^3 = y^2(2a-x)$

(iii) $x - 3y = 0$; (iv) $x^2 + x^2y^2 = (x+y)^2$

(v) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; (vi) $x^2 + y^2 = 2(x+y)$.

(2)- اكتب الصور الكارتيزية للمعادلات

(i) $r = \cos 2\theta$; (ii) $r^2 = \sin\theta + \cos\theta$

(iii) $r = 3\cos\theta$; (iv) $r^3 = \sin 2\theta - 1$

(3)- أوجد مساحة المثلث ABC حيث

4 sq. unit → $A(8,2)$; $B(3,14)$; $C(4,10)$

(4)- إذا كانت $P(3,2)$, $Q(13,-5)$ فاحسب مساحة المثلث opq حيث "o" نقطة الأصل

(5)- اختبر ما إذا كانت النقاط $(1,1)$, $(-2,4)$, $(-1,2)$ تقع على استقامة واحدة أم لا ؟ .

بند(٤): تغيير المحاور :

يسهل حل كثير من مسائل الهندسة بتغيير وضع محورى الإسناد إلى أوضاع أخرى مناسبة وسوف ندرس ثلاثة أنواع لتغيير محورى الإسناد وهى:

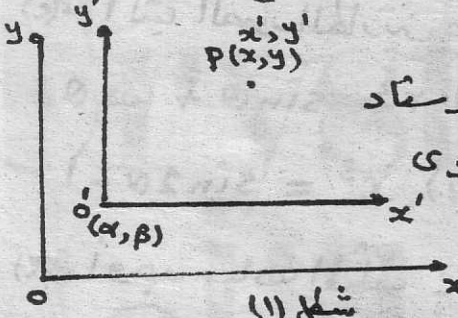
١- النقل : وفيه تنقل نقطة الأصل مع بقاء المحورين موازيين لوضعهما الأصلى .

٢- الدوران : وفيه تبقى نقطة الأصل كما هى مع دوران المحورين حولها خلال زاوية ما .

٣- النقل مع الدوران : وهذه هى الحالة العامة وفيها تنقل نقطة الأصل ثم يتبع ذلك دوران المحورين .

أولا : نقل المحورين :

نفرض أن x_0y هو مستوى الإسناد الأصلى وأن o' نقطة فى هذا المستوى احداثياها (α,β) . فإذا أخذنا محورين آخرين $x'o'y'$ موازيين للمحورين xoy على الترتيب لتكوين مستوى الإسناد $x'o'y'$ الذى يعرف بمستوى الإسناد الجديد . إذا كانت p نقطة ما فيكون احداثياها (x,y) بالنسبة لمستوى الإسناد الأصلى و (x',y') بالنسبة لمستوى الإسناد الجديد كما بالشكل (١) .



شكل (١)

يتضح من الشكل أن

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + \alpha \\ y &= y' + \beta \end{aligned}\right] \quad \ldots (I)$$

ويسمى (I) بعلاقتى التحويل فى هذه الحالة .

مثال (١) :

أوجد معادلة المنحنى $x^2+y^2+2fx+2gy+c=0$ بالنسبة لمحورين متوازيين للمحورين الأصليين ومتقاطعين في النقطة $(-f,-g)$.

الحل : عوض من التحويل (I) نجد أن

$$x = x' - f \quad \& \quad y = y' - g$$

∴ المعادلة المعطاة تأخذ الصورة :

$$(x'-f)^2+(y'-g)^2+2f(x'-f)+2g(y'-g)+c=0$$

أي أن $x'^2 + y'^2 = f^2 + g^2 - c$.

ونلاحظ أن المعادلة الأخيرة لا تحتوي على حدود من الدرجة الأولى في x', y' .

مثال (٢) :

إذا نقلنا نقطة الأصل إلى النقطة $(-2,1)$ مع بقاء المحورين متوازيين لوضعهما الأصلي فأوجد المعادلة الجديدة للمنحنى

$$x^2 + 10xy + y^2 - 6x + 18y - 7 = 0$$

الحل : باستخدام التحويل (I) نجد أن

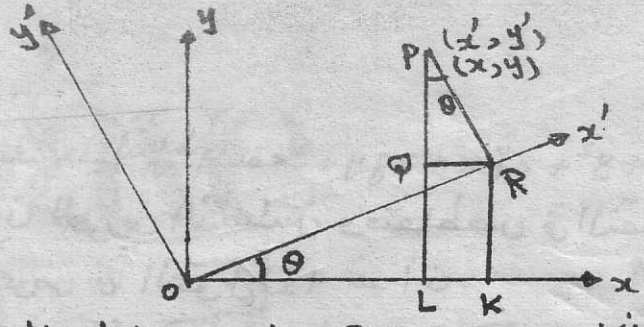
$$x = x' - 2 \quad \& \quad y = y' + 1$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$x'^2 + y'^2 + 10x'y' + 8 = 0$$

(ثانيا) : دوران المحاور :

نفرض أن المحورين دارا خلال زاوية مقدارها θ حول "O" وأن P أي نقطة في المستوى إحداثياتها بالنسبة للمستوى xOy هي (x,y) وبالنسبة للمحورين في وضعهما الجديد هي (x',y') .



من الشكل نجد أن :

$$OL = OK - LK = OK - RQ$$

$$PL = PQ + QL = PQ + RK$$

أي أن

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}\right] \ldots (II)$$

replacing x by x' & y by y' & putting θ by -α

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

ويعتبر II هو التحويل المطلوب .

مثال (3) : إذا دار المحوران بزاوية مقدارها $\frac{\pi}{4}$ فأوجد المعادلة الجديدة للمنحنى :

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 = 2$$

الحل : بالتعويض عن $\theta = \frac{\pi}{4}$ في التحويل II ثم التعويض في المعادلة للمنحنى المعطى نحصل على :

$$3x'^2 + 2y'^2 = 1$$

وفي هذه المعادلة الأخيرة عند دوران المحورين بزاوية معينة أمكن التخلص من الحد xy أي أنه يمكن حل المعادلة في صورتها العامة كما يوضح ذلك المثال الآتي :

مثال (4) : أوجد الزاوية التي يدورها المحوران بحيث يلاشي الحد xy في المعادلة :

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

الحل : باستخدام التحويل II تأخذ هذه المعادلة الصورة

$$a(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + 2h(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + b(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 + \ldots + \ldots + c = 0$$

Notice that the new system of coordinates is called the "auxiliary system"

بمساواة معامل xy بالصفر بالمعادلة السابقة نجد أن

$$-2a\sin\theta\cos\theta + 2h\cos^2\theta - 2h\sin^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta\,(a-b) \Rightarrow$$

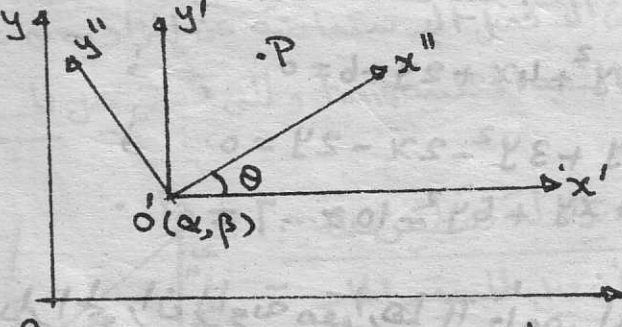
$2h\cos 2\theta = \therefore$ $2\sin\theta(a-b) \Rightarrow$ $2\tan 2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2h}{a-b}\right),$$

(ثالثا) الحالة العامة (النقل والدوران):

تعتبر هذه الحالة تجميع للحالتين السابقتين أى بمعنى ننقل نقطة الأصل أولا ثم ندير المحاور فى وضعها الجديد خلال زاويه θ حول نقطة الأصل الجديدة.

نفرض أن نقطة الأصل قد نقلت إلى النقطة $O'(\alpha,\beta)$ ثم دار المحوران زاوية θ. نفرض أن P أى نقطه فى المستوى



احداثياها بالنسبه للمحورين xoy هما (x,y) وبالنسبه للمحورين $x'o'y'$ هما (x',y') أما بالنسبه للمحوريه $x''o''y''$ هما (x'',y'').

نلاحظ أنه من أولا: $x = x' + \alpha$ & $y = y' + \beta$

وأنه من ثانيا

$$x' = x''\cos\theta - y''\sin\theta$$

$$y' = x''\sin\theta + y''\cos\theta$$

بتجميع أولا وثانيا نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} x &= x''\cos\theta - y''\sin\theta + \alpha \\ y &= x''\sin\theta + y''\cos\theta + \beta \end{aligned}\right] \quad \ldots (III)$$

وهذا هو التحويل المطلوب.

مثال(٥): إذا نقلت نقطة الأصل للنقطة (-1,2) ثم دار المحوران خلال زاوية مقدارها $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ فأوجد المعادلة الجديدة للمنحنى:

$$5x^2+4xy-2y^2+2x+12y-1=0$$

الحل: $\because \tan\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

باستخدام التحويل (III) نجد أن

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}x''-\frac{1}{\sqrt{5}}y''-1 \; ; \quad y=\frac{1}{\sqrt{5}}x''+\frac{2}{\sqrt{5}}y''+2$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على:

$$26x''^2-16x''y''-13y''^2+50=0$$

تمـــارين (٢)

١- أوجد النقطة التي تنقل اليها نقطة الأصل بحيث يختفي حدود الدرجة الأولى في المعادلات الآتية:

(i) $x^2+2xy-2y^2+4x+2y+6=0$ و

(ii) $3x^2-4xy+3y^2-2x-2y=0$ و

(iii) $9x^2-4xy+6y^2-10x-7=0$.

٢- إذا دار المحوران زاوية مقدارها $\frac{\pi}{2}$ فأوجد المعادلة الجديدة لكل من:

(i) $x+y=0$; (ii) $x^2+2xy+y^2=10$

٣- أوجد الزاوية التي يدورها المحوران بحيث يختفي الحد xy من المعادلة

$$x^2-xy+2y^2=6$$

٤- بنقل نقطة الأصل مع دوران المحورين ضع المعادلات التالية في أبسط صورة

(i) $x^2+y^2+6x-8y-5=0$, (ii) $x^2+xy+y^2-2x-y-4=0$

٥- أزل الحد xy من المعادلات الآتية

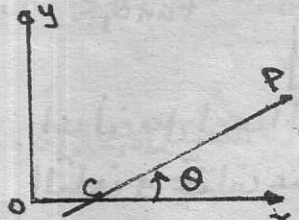
(i) $8x^2+4xy+5y^2=36$ & (ii) $(x+y)^2-8(y-x)=0$

الباب الثانى

الخط المستقيم وصوره

يتحدد الخط المستقيم إذا علمت أى نقطة عليه والزاويه التى يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وتسمى هذه الزاويه بزاويه ميل المستقيم.

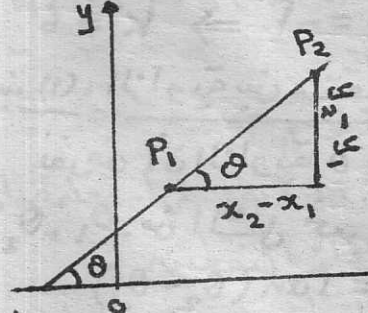
ميل الخط المستقيم



نفرض أن $\overleftrightarrow{PC}$ المستقيم المرسوم بالشكل مقابلا المحور السينى فى النقطه C. فإذا كانت θ الزاوية المقاسه فى اتجاه ضد عقارب الساعة من المستقيم $\overrightarrow{CX}$ إلى المستقيم $\overrightarrow{CP}$ فإن θ تكون زاويه ميل $\overleftrightarrow{PC}$ وهذه الزاوية إما أن تكون حادة $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ أو منفرجة $\frac{\pi}{2}<\theta<2\pi$

وحيث أنه يصعب من الناحية التحليليه العمل بالزاويه θ نفسها فقد وجد أنه من الأفضل الإستعاضة عن الزاويه θ عند تحديد الخط المستقيم بالنسبه المثلثيه $\tan\theta$ والتى تسمى ميل المستقيم ويرمز له بالرمز m.

ميل المستقيم بدلالة نقطتين عليه:



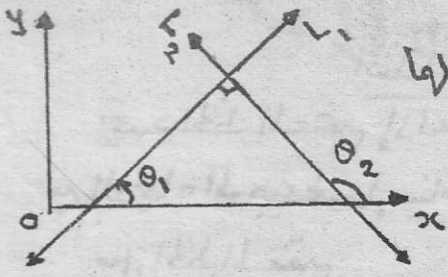
من الشكل نجد أن ميل المستقيم المار بالنقطتين $P_1(x_1,y_1)$; $P_2(x_2,y_2)$ هو

$$m = \tan\theta = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)$$

أى أن ميل المستقيم بدلالة نقطتين عليه يساوى فرق احداثى الصادى مقسوما على فرق احداثى السينى.

المستقيمات المتوازيه والمستقيمات المتعامدة:

إذا توازى مستقيمان فإنهما يصنعان مع الاتجاه الموجب لمحور x نفس الزاويه أى أن ميلهما يكون متساويين والعكس صحيح.



أما إذا تعامد المستقيمان وفرضنا أن ميلهما m_1, m_2 فإن :

$$m_2 = \tan\theta_2 = \tan(\theta_1 + \pi/2)$$
$$= -\cot\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_1} = -\frac{1}{m_1}$$

$$\therefore \boxed{m_1 m_2 = -1}$$

أى أن ميل أحد المستقيمين المتعامدين يساوى مقلوب ميل المستقيم الثانى و يختلف عنه فى الإشارة .

مثال(11): إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية فى B حيث $A(-5,3)$ ، $B(4,0)$ ، $C(k,k)$. أوجد قيمة k .

الحل : ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هو $m_1 = \overleftrightarrow{AB}$ هو $m_1 = \frac{3-0}{-5-4} = -\frac{1}{3}$

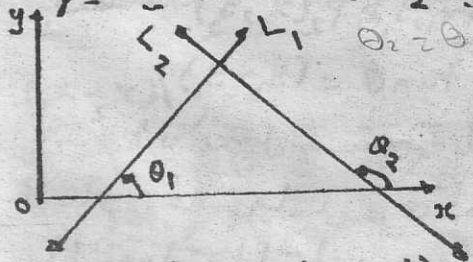
ميل المستقيم $\overleftrightarrow{BC}$ هو $m_2 = \overleftrightarrow{BC}$ هو $m_2 = \frac{K-0}{K-4} = \frac{K}{K-4}$

وحيث أن المستقيمان متعامدان عند B فإن

$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \cdot \frac{K}{K-4} = -1 \Rightarrow K = 6$$

بند(1): الزاوية بين مستقيمين :

نفرض أن الزاوية θ بين المستقيمين L_1, L_2 وأن زاويتا ميلهما θ_1, θ_2. من الشكل نجد أن



$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

فإذا كانت $m_1 = \tan\theta_1, m_2 = \tan\theta_2$ فإن الزاوية θ تعطى بالعلاقة

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \ldots (I)$$

نستنتج من (I) النتائج التالية:

(i) في حالة توازي L_1 مع L_2 فإنه $\theta = 0$ أو π ومنها $\tan\theta = 0$

وبالتالي فإن $m_1 = m_2$

(ii) في حالة تعامد L_1 مع L_2 فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنها $\tan\theta = \infty$ وبالتالي

فإن $m_1 m_2 + 1 = 0 \Rightarrow m_1 m_2 = -1$

مثال (٢): أوجد الزاوية المحصورة بين المستقيم المار بالنقطتين $(3,0),(2,5)$ والمستقيم المار بالنقطتين $(4,-7),(8,-6)$.

الحل: نفرض أن m_1, m_2 هما ميلا المستقيمين على الترتيب:

$$m_1 = \frac{0-5}{3-2} = -5 \; ; \; m_2 = \frac{-4+8}{7-6} = 4$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{4+5}{1-20} = -\frac{9}{19}$$

تمارين (١):

١- إثبت أن المثلث ABC حيث $A(1,7)$، $B(-13,1)$، $C(-5,21)$ قائم الزاوية في A.

٢- إثبت باستخدام الميل أن النقط الثلاث $(2\alpha+\beta, \alpha+\beta)$، $(\beta, \alpha-\beta)$، $(\alpha+\beta, \alpha)$ تقع على استقامة واحدة.

٣- أوجد الزاوية المحصورة بين المستقيم المار بالنقطتين $(\frac{1}{3}, \frac{7}{2})$، $(-\frac{5}{3}, \frac{1}{2})$ والمستقيم المار بالنقطتين $(-1,0),(0,-\frac{1}{3})$.

بند (٢): صور الخط المستقيم:

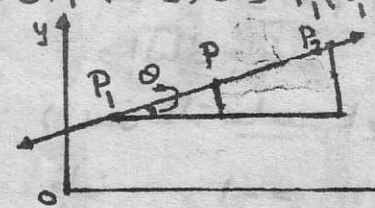
أولاً: بدلالة الميل ونقطة عليه:

نفرض أنه m ميله وأن $P_1(x_1, y_1)$ نقطة عليه. نفرض أنه $P(x,y)$ أي نقطة على هذا المستقيم فإن: $m = (y-y_1)/(x-x_1)$

المعادلة المطلوبة ... $\Rightarrow (y-y_1) = m(x-x_1)$

ثانيا: معادلة المستقيم بدلالة نقطتين عليه :

نفرض أن النقطتين هما $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ وأن $P(x, y)$ أى نقطة عليه. نستنتج من الشكل أن



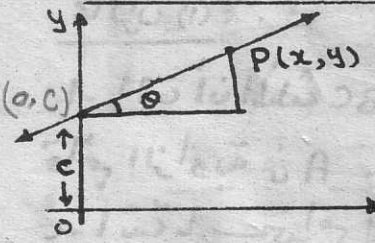
$$m = \tan\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أى أن

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ وهذه معادلة الخط المستقيم المطلوب. ويمكن صياغة هذه المعادلة فى الصورة التالية

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ثالثا: معادلة المستقيم بدلالة ميله والجزء المقطوع من محور الصادات :



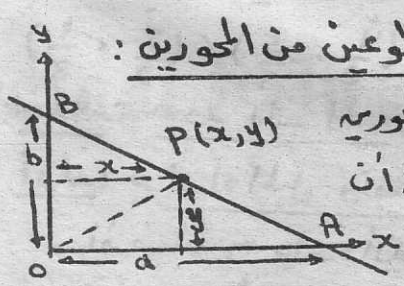
نفرض أن m ميله وأن "c" طوله جزؤه المقطوع من محور الصادات : نجد من الشكل أن

$$m = \frac{y - c}{x} \Rightarrow y = mx + c$$

حيث $P(x, y)$ أى نقطة على هذا المستقيم.

حالة خاصة: إذا مر المستقيم بنقطة الأصل فإن $c = 0$ أى أن معادلته تأخذ الصورة $y = mx$.

رابعا: معادلة المستقيم بدلالة الجزئين المقطوعين من المحورين :



نفرض أن a,b هما الجزءان المقطوعة من المحورين السينى والصادى على الترتيب. نجد من الشكل أن

$$\Delta OAB = \Delta OPB + \Delta OPA$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ay \Rightarrow$$

$$x/a + y/b = 1$$ حيث P أى نقطة عليه

ويمكن ايجاد معادله هذا المستقيم بطريقة ثانيه وسنعرفها فى ذلك (ثانيا) على النحو التالى :

$$m = \frac{y-0}{x-a} = \frac{-b}{a} \Rightarrow bx + ay = ab \Rightarrow$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال (٣) : اوجد المعادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-5, 6)$ ، $(1, 3)$ من المحورين .

الحل : ∵ معادلة المستقيم المار بالنقطتين هى

$$\frac{y-3}{x-1} = \frac{3-6}{1+5} = \frac{-1}{2} \Rightarrow x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$x/7 + y/\frac{7}{2} = 1$$

∴ المستقيم يقطع المحورين x, y فى الاطوال $7, \frac{7}{2}$ على الترتيب .

مثال (٤) : أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة $(-3, 5)$ ويوازى المستقيم $2x - y + 4 = 0$.

الحل : معادلة أى مستقيم يوازى المستقيم المعلوم هى $2x - y + k = 0$

وبما أن هذا المستقيم يمر بالنقطة $(-3, 5)$ فهى تحققه

$$\therefore \quad 2(-3) - (5) + k = 0 \Rightarrow k = 11$$

أى أن معادلة المستقيم المطلوب هى $2x - y + 11 = 0$

مثال (٥) : إثبت أن المعادلة $ax + by + c = 0$ تمثل معادلة خط مستقيم

الحل : ولنفرض أن $c \neq 0$ وبالتالى تأخذ هذه المعادلة الصورة

$$x/(-\frac{c}{a}) + y/(-\frac{c}{b}) = 1$$

وهى تمثل معادلة خط مستقيم يقطع المحورين x, y فى الاطوال $-\frac{c}{a}$ ، $-\frac{c}{b}$ على الترتيب . وتعرف الصورة المعطاه بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم .

بند(٣): نقطة تقاطع مستقيمين معلومين :

ولنفرض أن المستقيمين هما

$a_1x + b_1y = c_1$ ⟵ & $a_2x + b_2y = c_2$ ⟵

فإن نقطة تقاطعهما هى النقطة التى تحقق كلا المعادلتين وللحصول على احداثيا تلك النقطة نتأكد من المحددة $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ غير صفريه وذلك لكى نقطة التقاطع يمكن الحصول عليها:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

ملحوظة: فى حالة تساوى المحددة Δ للصفر فإنه يقال أنه المستقيمين فى حالة توازى ويكون الشرط هو $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

كما توجد حالة خاصة من التوازى وهو حالة تطابق المستقيمان ويكون الشرط هو $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

مثال(٦): أوجد قيمتى p و q فى حالة تطابق المستقيمان

$$px + 3y + 4 = 0$$
$$6x + qy - 5 = 0$$

الحل: باستخدام الشرط $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ نجد أن

$$\frac{p}{6} = \frac{3}{q} = \frac{4}{-5} \Rightarrow p = -\frac{24}{5} ; q = \frac{-15}{4}.$$

* بند(٤): حزمة المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين معلومين :

ولنفرض أن المستقيمين هما

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}\right] \Rightarrow a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

$$\Rightarrow (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + c_1 + \lambda c_2 = 0 \quad \ldots (1)$$

representing any line passes through (x_1, y_1)

Look

1) put in mind that (1) forms an expression of a straight line

2) at (x_1, y_1) the Point of interaction of $(L_1) \wedge (L_2)$ are independantly equal zero

3) thus under some conditions and relations of this line of (1) with other things (e.g. another line, some slope, etc.) we can determine the value of (λ)

تمثل المعادلة (1) حزمة المستقيمات المارة بنقطة التقاطع المستقيمين المعلومين و تسمى λ بارامترا أو متغيرا وسيطيا .

مثال (6) : يتقاطع المستقيمان $2x-y=0$ ، $3x-5y+7=0$ في النقطة P كما يتقاطع المستقيمان $x-7y+29=0$ ، $4x+5y=16$ في النقطة Q . أوجد بدون حساب إحداثيات P ، Q معادلة $\overleftrightarrow{PQ}$.

الحل: معادلة المستقيم المار بالنقطة P هي :

$$2x-y+\lambda_1(3x-5y+7)=0 \quad \cdots (1)$$

معادلة المستقيم المار بالنقطة Q هي :

$$4x+5y-16+\lambda_2(x-7y+29)=0 \quad \cdots (2)$$

* فإذا انطبق المستقيمان (1) ، (2) حصل على المستقيم $\overleftrightarrow{PQ}$ أي أن

$$\frac{2+3\lambda_1}{4+\lambda_2}=\frac{1+5\lambda_1}{7\lambda_2-5}=\frac{7\lambda_1}{-16+29\lambda_2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=-3/8 \ , \ \lambda_2=\frac{1}{8}$$

بالتعويض عن قيمة λ_1 في (1) أو عن قيمة λ_2 في (2) نحصل على $\overleftrightarrow{PQ}$ وهي معادلة $x+y=3$.

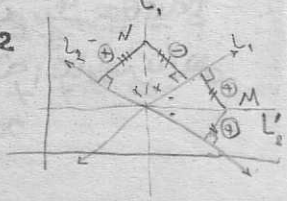
بند (5) : معادلتا منصفا الزاويتين بين مستقيمين معلومين :

نفرض أن معادلتي المستقيمين هما

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \& \quad a_2x+b_2y+c_2=0$$

وحيث أن المنصفين هما المحل الهندسي للنقطة المتساوية البعد عن المستقيمين . فإذا فرضنا أن $P(x,y)$ أي نقطة على أحد المنصفين فإن المعادلتين هما :

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \overset{(1)}{=} \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \overset{(2)}{}$$



the normal droped from any point on L_1' or L_2' have length (1) and (2) which are in terms of magnitude are equal; but could have opposite signs of direction w.r.t one line of them.

مثال (٧): أوجد معادلتي منصف الزاويتين الواقعتين بين المستقيمين

$3x+2y-5=0$ & $4x-6y+7=0$

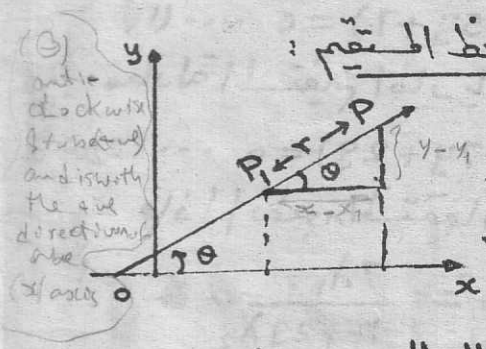
الحل: معادلتا المنصفين هما

$$\frac{3x+2y-5}{\sqrt{13}} = \pm \frac{4x-6y+7}{\sqrt{52}}$$

ومنها نحصل على:

$$10x-2y-3=0 \quad \& \quad 2x+10y-17=0$$

* بند (٦): المعادلتان البارامتريتان للخط المستقيم:



نفرض أن $P_1(x_1, y_1)$ نقطة تقع على المستقيم $\overrightarrow{P_1P}$ الذي زاوية ميله θ.

نفرض أن $P(x, y)$ أي نقطة عليه.

من الشكل نجد أن

$$\sin\theta = \frac{y-y_1}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x-x_1}{r}; \quad r = \overline{P_1P}$$

ويمكن كتابة المعادلتين على الصورة

$$x = x_1 + r\cos\theta; \quad y = y_1 + r\sin\theta \quad \ldots (1)$$

وتسمى (1) بالمعادلات البارامترية للمستقيم. وتسمى r بالبارامتر وقيمتها تتغير بتغير وضع P وهي في أي وضع من أوضاعها تمثل بعد النقطة P عن النقطة الثابتة P_1.

* مثال (٨): إذا قابل المستقيم الذي ميله $\frac{4}{3}$ والمار بالنقطة $A(2, -7)$ المستقيم $75x+48y=231$ في النقطة B. أوجد الطول $\overline{AB}$.

الحل: نفرض أن θ هي زاوية ميل المستقيم الأول فإن $\tan\theta = \frac{4}{3}$

أي أن $\sin\theta = \frac{4}{5}$، $\cos\theta = \frac{3}{5}$ وأن معادلتيه البارامتريتين هي

$$x = 2 + \frac{3}{5}r; \quad y = -7 + \frac{4}{5}r.$$

أى أن أى نقطة على هذا المستقيم هى $(2+\frac{3}{5}r, -7+\frac{4}{5}r)$ حيث "r" هى بعد هذه النقطة عن A . فإذا كانت هذه النقطة هى النقطة B فى تحقق المعادلة $75x+48y=231$ أى أن

$$75(2+\frac{3}{5}r)+48(-7+\frac{4}{5}r)=231 \Rightarrow$$

$$\overline{AB}=r=5 .$$

تمارين عامة :

(١) أوجد معادلة المستقيم فى كل من الحالات الآتية :

(i) زاوية ميله 150° ويقطع من المحور x جزءًا طوله 4 .

(ii) يوازى المحور y ويمر بالنقطة $(4,-3)$.

(iii) يمر بالنقطه $(-5,3)$ ويتعامد مع المستقيم $x-5y+1=0$.

(iv) يمر بالنقطة $(1,5)$ ويقطع من المحور x طولا قدره ياوى ضعف الطول الذى يقطعه من المحور y .

(٢) ABCD مستطيل فيه $A(-6,0)$ ومعادلة الضلع BC هى $4x+3y-12=0$. أوجد معادلتى AB ، CD علما بأنهما يقطعان من المحور y جزئين متساويين فى المقدار ومختلفين فى الإشارة .

(٣) OPQR مستطيل فيه O نقطة الأصل ، $P(5,0)$ ، $Q(0,3)$. أوجد معادلات كل من أضلاعه ومعادلتى قطريه .

(٤) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين $x+5y+13=0$ ، $3x-2y-12=0$ ويتعامد مع المستقيم الأول .

(٥) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطه تقاطع المستقيمين $2x-9y+3=0$ ، $5x-2y-13=0$ ويوازى المستقيم $2x+3y+4=0$

(٦) أوجد معادلتي منصف الزاويتين الواقعتين بين كل زوج من المستقيمات الآتية

(i) $x+y=2$ & $7x-y=6$.

(ii) $3x+2y-7=0$ & $2x+3y+8=0$.

(iii) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ & $x\cos\beta+y\sin\beta=q$

(٧) المستقيم الواصل بين النقطتين $P(ct_1,\frac{c}{t_1})$ & $Q(ct_2,\frac{c}{t_2})$ يقابل المحور x في A والمحور y في B. إثبت أن معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي

$$x+t_1t_2y=c(t_1+t_2)$$

(٨) إثبت أنه لجميع قيم α، p تلاقى المستقيمات الثلاثة

$$x\sin\alpha+y\cos\alpha=0,\ x\cos\alpha+y\sin\alpha=p,$$

$x\cos2\alpha-y\sin2\alpha=p\cos2\alpha\sec2\alpha$ تلاقى في نقطة واحدة.

(٩) إثبت أن الزاوية θ المحصورة بين المستقيمين:

$a_1x+b_1y+c_1=0$ & $a_2x+b_2y+c_2=0$ تعطى بالعلاقة

$$\tan\theta=(a_2b_1-a_1b_2)/(a_1a_2+b_1b_2)$$

(١٠) إثبت أن الثلاث مستقيمات

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; $ax+by=2ab$; $x-y=c$

تلاقى في نقطة واحدة إذا كانت $c=ab/(a-b)$.

(١١) إثبت أن النقاط الثلاثة التالية

(x_1,y_1), (x_2,y_2), $\left(\frac{k_1x_2+k_2x_1}{k_1+k_2},\frac{k_1y_2+k_2y_1}{k_1+k_2}\right)$ تقع على استقامة واحدة.

(١٢) ABC مثلث رؤوسه النقط $A(0,3)$, $B(5,0)$, $C(2,8)$. أوجد معادلات كل من أضلاعه.

الباب الثالث

المعادلة العامة للقطاعات المخروطية

سوف نرى أن المعادلة البسيطة لأى قطع يمكن أن تصبح معادلة عامة من الدرجة الثانية وذلك بنقل نقطة الأصل ودوران المحاور، وعكس ذلك إذا كان لدينا معادلة عامة من الدرجة الثانية فى x, y تمثل قطعا مخروطيا فإنه لرسم هذا القطع يلزم تبسيط معادلته وذلك باختيار وضع مناسب لمحاور الإحداثيات عن طريق نقل نقطة الأصل ودوران المحاور.

the product of two formulea of a straight line is the general shape formed (1)

بند (1): المعادلة العامة من الدرجة الثانية:

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية فى x, y هى:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \quad \dots (1)$$

المعادلة (1) تمثل قطعا مخروطيا، أى تمثل خطين مستقيمين أو دائرة أو قطعا مكافئا أو ناقصا أو زائدا ولتصنيف ذلك نتبع الآتى:

(i) نحذف من المعادلة (1) الحد الذى يحتوى على xy وذلك بدوران المحاور زاوية θ وكما نعلم من تغير المحاور أن θ تعطى بالعلاقة

يعدد دوران المحاور والتعويض عنها فى الاحداثيات الجديدة نجد حاصل ضرب x, y وساوينا بالصفر

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2h}{a-b} \quad *$$

وتأخذ المعادلة (1) الصورة:

$$Ax^2 + By^2 + 2Fx + 2Gy + C = 0 \quad \dots (2)$$

(ii) التصنيف

أولا: إذا كانت $A \neq 0$ & $B \neq 0$

فى هذه الحالة يمكن كتابة المعادلة (2) على الصورة

$$A\left(x + \frac{F}{A}\right)^2 + B\left(y + \frac{G}{B}\right)^2 = \frac{F^2}{A} + \frac{G^2}{B} - C = K \text{ (say)}$$

وذلك باستخدام فكرة استكمال مربع.

بنقل نقطة الأصل إلى النقطة $(-F/A, -G/B)$ فإن (2) تصبح

$$Ax^2 + By^2 = K \quad \dots (3)$$

فإذا كانت

١- $K=0$ فإن المعادلة (3) تمثل

Look

وذلك لأن $Ax^2 = -By^2$ ⇒ $y = \sqrt{-\frac{A}{B}}\,x$

- خطين مستقيمين حقيقيين مختلفين عندما A,B تكونان مختلفتي الإشارة
- خطين مستقيمين تخيليين عندما A,B تكونان بعكس ذلك

ب- $K \neq 0$ فإن المعادلة (3) يمكن كتابتها على الصورة

$$x^2/(K/A) + y^2/(K/B) = 1$$

وتمثل هذه المعادلة

(i) قطع ناقص حقيقي عندما K/A ، K/B تكونان موجبتين

(ii) قطع ناقص تخيلي عندما K/A ، K/B تكونان سالبتين

- دائرة عندما $A=B$
- قطع زائد عندما K/A ، K/B تكونان مختلفتي الإشارة.

ثانيا، $A=0$ أو $B=0$. فإذا اعتبرنا $A=0$ فإن (2) تصبح

$$By^2 + 2Fx + 2Gy + C = 0$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$B(y+G/B)^2 = -2Fx + G^2/B - C \quad \dots (4)$$

فإذا كانت

١- $F=0$ فإن المعادلة (4) تمثل خطين مستقيمين متوازيين.

ب- $G^2/B = C$ ، $F=0$ فإن المعادلة (4) تمثل خطين مستقيمين منطبقين

ج- $F \neq 0$ فإن المعادلة (4) يمكن كتابتها على الصورة

$$(y+G/B)^2 = -(2F/B)\left(x + \frac{C}{2F} - \frac{G^2}{2BF}\right)$$

وهذه المعادلة تمثل قطعا مكافئا محوره يوازي محور x وطول وتره

(*)

$$y^2 - (m_1+m_2)xy + m_1m_2x^2 + (m_1C_2 + m_2C_1)x - (C_1+C_2)y + C_1C_2$$

$$= y^2 + \left(\frac{2h}{b}\right)xy + \left(\frac{a}{b}\right)x^2 + (2f/b)x + (2g/b)y + \left(\frac{c}{b}\right)$$

البؤرى العمودى يساوى $2F/B$ ورأسه النقطة $\left(\frac{G^2}{2BF}-\frac{C}{2F}, -\frac{G}{B}\right)$

وبالمثل من المعادلة (2) إذا إعتبرنا $B=0$ نحصل على نفس التصنيف مع ملاحظة أن القطع المكافئ يكون محوره موازيا للمحور y وطول وتره البؤرى العمودى $2G/A$ ورأسه النقطة $\left(-F/A, \frac{F^2}{2AG}-\frac{C}{2G}\right)$ عندما $F=0$.

ملحوظة: الحالة التى فيها A, B تتلاشى معا تأخذ المعادلة (2) الصورة $2Fx+2Gy+C=0$ وهى معادلة مستقيم

ولرسم القطع المخروطى من معادلته العامة يلزم تحديد نوع القطع حتى يسهل اتباع الطريقة المعينة لكل منها.

بند (٢): تحديد نوع القطع:

أولا: المعادلة العامة تمثل زوج من المستقيمات

المعادلة المتجانسة من الدرجة الثانية فى x, y يكتب على الصورة

$$ax^2+2hxy+by^2=0 \quad \dots (5)$$

بصياغة المعادلة (5) على الصورة

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{2h}{b}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{a}{b}=0 \quad \dots (6) \quad (b\neq 0)$$

يمكن النظر المعادلة (6) على أنها معادلة من الدرجة الثانية فى $\frac{y}{x}$ ويكون حلها هو

$$y/x = \frac{-h\pm\sqrt{h^2-ab}}{b} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow$$

$$y=m_1x \quad \& \quad y=m_2x$$

وهما معادلتا خطين مستقيمين يمران بنقطة الأصل ويكونان

(i) حقيقيان ومختلفان إذا كان $h^2>ab$

(ii) " ومتوازيان إذا كان $h^2=ab$

(iii) تخيليان إذا كان $h^2<ab$

i.e. $y^2+\frac{2h}{b}xy+\frac{a}{b}x^2+\frac{2f}{b}x+\frac{2g}{b}y+\frac{c}{b} \equiv (y-m_1x-c_1)(y-m_2x-c_2)$

مثال: حدد نوع المستقيمين الدالة عليها المعادلة

$$x^2 + 4xy - 9y^2 = 0$$

الحل:

$$a = 1 \; ; \; b = -9 \; , \; h = 2$$

$$\therefore \frac{y}{x} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+9}}{-9} = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{-9} \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{9}(2 - \sqrt{13})\,x \quad \& \quad y = \frac{1}{9}(2 + \sqrt{13})\,x$$

وهما مستقيمان حقيقيان ومختلفان. واضح أن $h^2 > ab$

ملحوظة: الزاوية θ المحصورة بين المستقيمان الممثلان بالمعادلة

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad (1)$$

تعطى بالعلاقة

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b} \quad (*)$$

وأن معادلة منصفا الزاويتين المحصورتين بينهما هى

$$\frac{x^2 - y^2}{a-b} = \frac{xy}{h} \quad (**)$$

هذه المعادلة تعبر عن خاصية هندسية

كما يجب أن نلحظ أن شرط تعامدهما هو $a + b = 0$.

مثال: أوجد معادلة منصفى الزاويتين المحصورتين بين المستقيمين

$$4x^2 - xy - 3y^2 = 0$$

الحل: المعادلة تمثل زوج من المستقيمات الحقيقية وذلك لأن $h^2 > ab$ ويكون معادلة المنصفان هى

$$\frac{x^2 - y^2}{4+3} = \frac{xy}{-1/2} \Rightarrow x^2 + 14xy - y^2 = 0$$

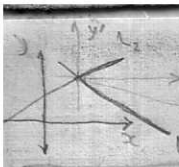
الشرط الضرورى لكى تمثل المعادلة العامة (1) زوج من المستقيمات:

نفرض أن تمثل زوج المستقيمات

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \& \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

وأن (α, β) هى احداثيات نقطة تقاطعهما. بنقل نقطة الأصل إلى النقطة (α, β) أى أن $x = x' + \alpha \; ; \; y = y' + \beta$

وبالتعويض فى (1) نحصل على:



الجزء الباقى من المعادلة (1) والذى يحتوى x^2 أو xy أو y^2 يعطينا معادلة طقم مستقيم يمر بالنقطة (α, β) والتى ينبغى أن يكون المقدار

$y' = m_1 x'$ ③ أو $y' = m_2 x'$ ④ حيث $y' = y - \beta$ ⑤ $x' = x - \alpha$ ⑥

$a x'^2 + 2h x'y' + b y'^2 = 0$ ⑦

بتعويض ③ فى ① و ④ فى ② فى المعادلة التربيعية المتجانسة

$$a(x'+\alpha)^2 + 2h(x'+\alpha)(y'+\beta) + b(y'+\beta)^2 + 2f(x'+\alpha) + 2g(y'+\beta) + c = 0 \quad \dots (7)$$

وحيث أن المعادلة (7) تمثل زوج من المستقيمات يمران بالنقطة (α, β) فلا بد أن تكون متجانسة أى أن معاملى y' و x' وكذلك الحد المطلق ينعدم أى أن

$a\alpha + h\beta + f = 0$ & $h\alpha + b\beta + g = 0$

$a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2 + 2f\alpha + 2g\beta + c = 0$ (2C)

وحيث أن (α, β) تحقق معادلة المستقيم فإن المعادلة الأخيرة تأخذ الصورة $f\alpha + g\beta + c = 0$ وهكذا نجد أن

معامل x' :	$a\alpha + h\beta + f = 0$
معامل y' :	$h\alpha + b\beta + g = 0$
الحد المطلق :	$f\alpha + g\beta + c = 0$

$\xrightarrow{\text{بحذف } \alpha, \beta}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & f \\ h & b & g \\ f & g & c \end{vmatrix} = 0$$

وهذا هو الشرط الضرورى لكى تمثل المعادلة (1) زوج من المستقيمات.

الخطوات الواجب اتباعها لتحليل المعادلة (1) لزوج من المستقيمات

(i) الإختبار : وهو التأكد من أن Δ ينعدم

(ii) كتابة المعادلة (1) على الصورة:

$$by^2 + (2hx + 2g)y + ax^2 + 2fx + c = 0 \quad \dots (8)$$

والنظر للمعادلة (8) كمعادلة من الدرجة فى y ويكون حلها:

$$y = \frac{-(2hx+2g) \pm \sqrt{(2hx+2g)^2 - 4b(ax^2+2fx+c)}}{2b}$$

i.e. the indicator $= \Delta = 0$

represent a pair of lines when ⊛ is a complete square, i.e. the indicator of this quadratic equation must be zero

أى أن $y = \frac{-(hx+g) \pm \sqrt{[(hx+g)^2 - b(ax^2+2fx+c)]}}{b}$ ⊛

الشرط $\Delta = 0$ يعنى أن المقدار الموجود تحت الجذر مربع كامل

أى أن $y = \frac{-(hx+g) \pm (\alpha x + \beta)}{b} \Rightarrow$

زوج المستقيمات $\left.\begin{matrix} by + hx + g = + (\alpha x + \beta) \\ by + hx + g = - (\alpha x + \beta) \end{matrix}\right]$

مثال: إدرس المعادلة $2x^2 + 3xy - 9y^2 + 7x - 6y + 3 = 0 \quad \ldots (1)$

الحل:

(i) الإختبار:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3/2 & 7/2 \\ 3/2 & -9 & -3 \\ 7/2 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$2(-27-9) - 3/2\left(9/2 + \frac{21}{2}\right) + 7/2\left(-\frac{9}{2} + \frac{63}{2}\right)$$

$$= -72 - 45/2 + \frac{7}{2}(27) = -\frac{189}{2} + \frac{189}{2} = 0 \Rightarrow$$

المعادلة (1) تمثل زوج من المستقيمات. أيضا حقيقيان ومختلفان لأن $h^2 > ab$

(ii) صيغ المعادلة (1) على الصورة:

$$-9y^2 + (3x-6)y + 2x^2 + 7x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{-(3x-6) \pm \sqrt{(3x-6)^2 - 4(-9)(2x^2+7x+3)}}{-18}$$

$$= \frac{-(3x-6) \pm \sqrt{(9x+12)^2}}{-18} \Rightarrow$$

$$-18y = -(3x-6) \pm (9x+12) \Rightarrow$$

$$2x - 3y + 1 = 0 \quad \& \quad x + 3y + 3 = 0 \quad \ldots (2)$$

تمثل (2) معادلتا المستقيمان للمعادلة (1).

ثانياً الحالة التى فيها $\Delta \neq 0$:

فى هذه الحالة تمثل المعادلات الحالات التاليه

أ- دائرة عندما $a = b \; ; \; h = 0$ — Circle

ب- قطعا مكافئا عندما $h^2 = ab$ — Parabola

جـ- قطعا ناقصا عندما $h^2 < ab$ — ellipse

د- قطعا زائدا عندما $h^2 > ab$ — hyperbola

ويكون القطع الزائد قائما إذا كان $a + b = 0$

مثال: حدد نوع كل من القطاعات الآتيه :

(i) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$

(ii) $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 34x - 12y - 3 = 0$

(iii) $3x^2 - 2xy - 5y^2 + 7x - 9y = 0$

الحل : (i) بمقارنه المعادلة المعطاه بالمعادلة (1) نجد أن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -12 & -9 \\ -12 & 16 & \frac{-101}{2} \\ -9 & \frac{-101}{2} & 19 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

المعادلة (i) تمثل قطعا مخروطيا . بما أن $h^2 = ab$

∴ المعادلة (i) تمثل قطعا مكافئا .

(ii) بمقارنة المعادلة المعطاه بالمعادلة (1) نجد أن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & 6 & -17 \\ 6 & 8 & -6 \\ -17 & -6 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

كما أن $h^2 < ab$. ∴ المعادلة (ii) تمثل قطع ناقص .

(iii) بمقارنه المعادلة المعطاه بالمعادلة (1) نجد أن

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7/2 \\ -1 & -5 & -9/2 \\ 7/2 & -9/2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

وأن $h^2 > ab$. إذن المعادلة (iii) تمثل قطعا زائدا .

بند (٣): القطاعات المخروطية المركزية :

وهى القطاعات الناقصية والقطاعات الزائدية . ولرسم هذه القطاعات يلزم تعيين :

أولا : مركز القطع :

يعرف مركز القطع بأنه النقطة التى تنصف جميع أوتار القطع المارة بها .

فإذا فرضنا أن مركز القطع الذى معادلته :

$$F(x,y) \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \quad \ldots (1)$$

هو نقطة الأصل وأن (x', y') أية نقطة على القطع فإن النقطة $(-x', -y')$ تقع أيضا عليه ، بالتعويض فى (1) بالنقطتين نحصل على

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2fx' + 2gy' + c = 0$$

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 - 2fx' - 2gy' + c = 0$$

وبطرح هاتين المعادلتين ينتج أن $4fx' + 4gy' = 0$

وحيث أن هذه المعادلة صحيحة لجميع قيم (x', y') الواقعة على القطع فإن : $f = 0$ & $g = 0$ وتأخذ المعادلة (1) الصورة

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0$$

وبذلك نكون قد برهنا الحقيقة الهامة التالية :

المعادلة (1) تمثل قطعا مخروطيا مركزيا مركزه نقطة الأصل إذا كانت $f = 0, g = 0$ أى إذا تلاشت حدود الدرجة الأولى فى (1) .

(في حدود الدائرة المركزية لنقطة الأصل)

فإذا كان مركز القطع هو النقطة (x_1, y_1) فمن الحقيقة السابقة تكون معادلة القطع - بالنسبة لمحورين ماريين بمركز القطع - خاليه من حدود الدرجة الأولى في x و y. بوضع $x'+x_1, y'+y_1$ بدلا من x و y على الترتيب في المعادلة (1) نحصل على:

$$a(x'+x_1)^2 + 2h(x'+x_1)(y'+y_1) + b(y'+y_1)^2 + 2f(x'+x_1) + 2g(y'+y_1) + c = 0 \quad \cdots (2)$$

من هذه المعادلة بمساواة كل من معاملي x' و y' بالصفر ينتج أن

$$2ax_1 + 2hy_1 + 2f = 0$$

$$2hx_1 + 2by_1 + 2g = 0$$

والمعادلتين الأخيرتين يمكن الحصول عليهما من المعادلة (1) بإيجاد مشتقتها الجزئية الأولى بالنسبة إلى x وكذلك بالنسبة إلى y على الترتيب عند النقطة (x_1, y_1) ومساواة كل منهما بالصفر كما يلي:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_1,y_1)} \equiv 2ax_1 + 2hy_1 + 2f = 0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_1,y_1)} \equiv 2hx_1 + 2by_1 + 2g = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين:

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} f & h \\ g & b \end{vmatrix}} = \frac{y_1}{\begin{vmatrix} a & f \\ h & g \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}}$$

أي أن مركز القطع هو النقطة

$$\left(\frac{fh-gh}{ab-h^2}, \frac{ag-fh}{ab-h^2}\right)$$

وبالرجوع إلى المعادلة (2) فإن معادلة القطع تأخذ الصورة:

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 = K \quad \cdots (3)$$

حيث $K = (ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + c)$

لكل بؤرة دليل وهذا معروف من الهندسة في الدراسة السابقة للبؤرة
& القطاعات تصنف بدلالة ① البؤرة و الدليل ② & ③ نقطة ثابتة

ملاحظة: المعادلة (3) هي معادلة القطع بالنسبة إلى المحورين x', y' الموازيين للمحاور الأصلية و مارين بمركز القطع.

ثانياً: معادلة وطول كل من المحورين الرئيسيين:

بقسمة المعادلة (3) على K فإن معادلة القطع بالنسبة إلى محورين موازيين للمحاور الأصلية و مارين بمركز القطع يمكن أن تأخذ الصورة

$$Ax'^2 + 2Hx'y' + By'^2 = 1 \quad \dots (4)$$

نعتبر أنه لدينا دائرة متحدة المركز مع القطع (4) أي مركزها هو نقطة الأصل الجديدة (مركز القطع) و نصف قطرها "r" فتكون معادلتها هي: $x'^2/r^2 + y'^2/r^2 = 1 \dots (5)$

بطرح المعادلة (5) من المعادلة (4) فنحصل على:

$$(A - \frac{1}{r^2})x'^2 + 2Hx'y' + (B - \frac{1}{r^2})y'^2 = 0 \quad \dots (6)$$

والمعادلة الأخيرة من الدرجة الثانية في x', y' ومتجانسة، لذلك فهي تمثل خطين مستقيمين مارين بنقطة الأصل (مركز القطع). نختار r بحيث تمثل المعادلة (6) خطين مستقيمين منطبقين، أي يكون الطرف الأيسر للمعادلة (6) مربعاً كاملاً، أي بحيث أن

$$H^2 = (A - \frac{1}{r^2})(B - \frac{1}{r^2}) = \left(\frac{Ar^2 - 1}{r^2}\right)\left(\frac{Br^2 - 1}{r^2}\right)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في r^2 و بحلها نحصل على قيمتين r_1^2, r_2^2 مثلاً، وتكونان موجبتين في حالة القطع الناقص، ومختلفتين في إشارة في حالة القطع الزائد. وفي حالة القطع الناقص تكون r_1, r_2 هما نصفي المحور الأكبر والمحور الأصغر أي يمكن كتابة معادلة القطع بالنسبة إلى المحاور الرئيسية كمحاور للإحداثيات على الصورة: $x^2/r_1^2 + y^2/r_2^2 = 1$

$\therefore H^2r^4 = ABr^4 - Br^2 - Ar^2 + 1$

$\therefore (AB - H^2)(r^2)^2 - (B + A)r^2 + 1 = 0$

ملاحظة :- نتوصل فى معادلة المحاور لـ (r^2) الموجبة
لنتعرف لنا معادلتيه للمحاور للقطع الناقص ← كل واحد منهم له طول الأكبر = الرئيسى
ورسم معادلة للمحور القاطع من الزائد

وبالمثل بالنسبة للقطع الزائد حيث تكون r_1^2, r_2^2 أحدهما موجبة و الأخرى سالبة حيث جذر الموجبة يمثل طول نصف المحور القاطع.
ولإيجاد معادلة كل من المحاور الرئيسية، بالتعويض فى المعادلة (8) عن $r^2 = r_1^2$، حيث r_1^2 هى الموجبة، نحصل على معادلة خطية مستقيمة منطبقة وتكون معادلة هذا الخط هى معادلة أحد المحورين بالنسبة إلى محورين ماريين بمركز القطع، ونحصل على معادلة المحور الآخر بنفس الطريقة أى بالتعويض عن $r^2 = r_2^2$. وبالرجوع إلى احداثيات مركز القطع يمكن إيجاد معادلتى المحورين الرئيسيين بالنسبة للمحاور الأصلية.
وعلى ذلك يمكن رسم القطع بعد تعيين مركزه وطول ومعادلة كل من محوريه الرئيسيين ثم بالرجوع إلى خواص القطاعات فى صورتها البسيطة يمكن حساب الاختلاف المركزى للقطع واحداثيات كل من بؤرتيه ومعادلة كل من الدليلين.

ملاحظة: فى حالة القطع الزائد، بعد تعيين احداثيات مركزه، يمكن أن نوجد معادلة خطيه التقاربين كما يلى:
حيث أن معادلة الخطيه التقاربين للقطع (1) يمكن كتابتها على الصورة:

(أى بالنسبة للمعادلة العامة للقطع)

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c' = 0 \quad \cdots (7)$$

وحيث أن الخطيه التقاربيه يمران بمركز القطع (x_1, y_1)، بالتعويض بهذه النقطة فى المعادلة (7) نحصل على c'، وبقيمة c' هذه تكون (7) هى معادلة الخطيه التقاربيه ثم نعمل على إيجادهما.

تلخيص: $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) + (D/h^2 - ab) = 0$ | we get the equation of the asymptotes

لرسم القطع الزائد أو القطع الناقص فإننا نوجد:
أولاً: احداثيات مركز القطع (x_1, y_1) بحل المعادلتين:

الخطيه التقاربيه = وتر للقطع يتصل نقطتا تماس
لإيجاد الوتر = يمر بمركز القطع فهذا يعمل القطع مرتين

$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x_1,y_1)} = 0$ ، $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_1,y_1)} = 0$

ثانيا: ننقل محورى الإحداثيات إلى مركز القطع كنقطة أصل جديدة حتى نأخذ معادلة القطع الصورة:

$$Ax'^2 + 2Hx'y' + By'^2 = 1$$

ثالثا: نوجد تقاطع القطع في صورته الأخيرة مع الدائرة

$$x'^2/r^2 + y'^2/r^2 = 1$$

فنحصل على: $(A - \frac{1}{r^2})x'^2 + 2Hx'y' + (B - \frac{1}{r^2})y'^2 = 0 \dots (8)$

والمعادلة الأخيرة تمثل زوج من المستقيمات لتطبيقه عندما:

$$(A - \frac{1}{r^2})(B - \frac{1}{r^2}) = H^2$$

وهذه المعادلة تعطينا قيمتين للمقدار r^2 وبالتالى من هاتين القيمتين نحصل على طول كل من محورى القطع الرئيسيين وبالتعويض عن قيمتى r^2 فى (8) نحصل على معادلتى المحورين الرئيسيين للقطع بالنسبة للمحورين المارين بمركز القطع.

أمثلة توضيحية:

مثال(1): إثبت أن المعادلة:

$$F(x,y) \equiv 5x^2 - 6xy + 5y^2 + 8x - 24y + 24 = 0 \dots (1)$$

تمثل قطعا ناقصا وأوجد مساحته وإختلافه المركزى ومعادلة كل من محوريه وبعد احداثيات بؤرتيه ومعادلة كل من لدليليه ثم إرسمه.

الحل: بمقارنة المعادلة المعطاه بالمعادلة العامة للقطع المخروطى نجد أن

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -12 \\ 4 & -12 & 24 \end{vmatrix} \neq 0$$

$h^2 = (-3)^2 = 9$ ، $ab = 25 \Rightarrow h^2 < ab$

وعلى ذلك فإن المعادلة المعطاه تمثل قطعا ناقصا.

LOOK

(1) Center of the section (x_1, y_1) (2) lengths of its axes; (3) Focal distance from the center $= ea$ (4) directrix distance from the center $= \frac{a}{e}$

(5) the ordinates of the directrix $x = x_1 + r\cos\theta$ ، $y = y_1 + r\sin\theta$ ✍ 12

the Slope of the large axis = $\tan\theta$ ⇒ $(r = \frac{a}{e})$ (6) formula of the directrix which is.

Parallel to the small axis whose formula $y = mx + c$

⇒ this of the directrix $y_d = mx_d + c'$ ⇒

we can find (c') ⇒ $y = mx + c'$

i.e. directrix at (x_d, y_d)

أولاً: إحداثيات مركز القطع:

$$\left.\begin{aligned} \partial F/\partial x &= 0 \Rightarrow 5x - 3y + 4 = 0 \\ \partial F/\partial y &= 0 \Rightarrow -3x + 5y - 12 = 0 \end{aligned}\right] \xrightarrow{\text{بحل}} (1,3)$$ المركز

ثانياً: نقل المحاور إلى النقطة (1,3):

أى نقل محورى الإحداثيات إلى مركز القطع كنقطة أصل جديدة

فنأخذ المعادلة (1) الصورة:

$$\frac{5}{8}x'^2 - \frac{3}{4}x'y' + \frac{5}{8}y'^2 = 1 \quad \ldots(2)$$

ثالثاً: نوجد تقاطع القطع (2) مع الدائرة

$$\frac{x'^2}{r^2} + y'^2/r^2 = 1 \quad \ldots(3)$$

أى $\ldots(4)$ $\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{r^2}\right)x'^2 - \frac{3}{4}x'y' + \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{r^2}\right)y'^2 = 0$

المعادلة (4) تمثل خطين مستقيمين منطبقين عندما

$$\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{r^2}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \Rightarrow \frac{5}{8} - \frac{1}{r^2} = \pm\frac{3}{8} \Rightarrow r = 2, 1$$

∴ طول المحور الكبير 4، طول المحور الصغير 2

بما أن مساحة القطع الناقص تساوى πab حيث a نصف طول المحور الكبير، b نصف طول المحور الصغير فإذا مساحته تساوى 2π

الاختلاف المركزى $\Rightarrow e = \sqrt{3}/2$ $\left[b^2 = a^2(1-e^2)\right]$ ∴

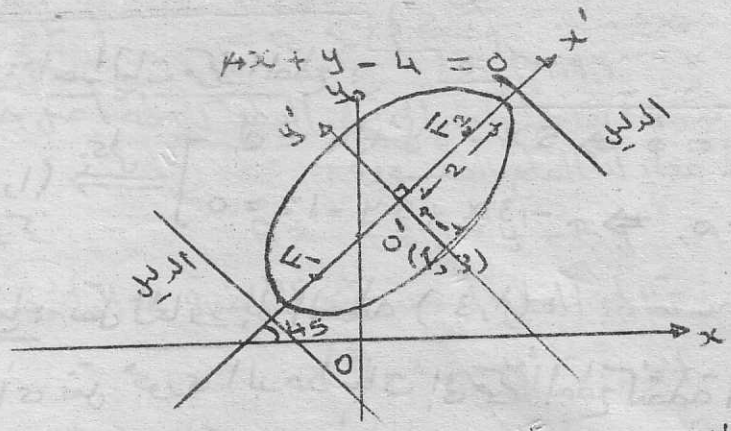
لإيجاد معادلة المحور الكبير نضع $r=2$ فى المعادلة (4) نحصل $x' - y' = 0$ وهى معادلة المحور الكبير بالنسبة إلى محورين ماريين بمركز القطع أما بالنسبة لمحاور الإحداثيات الأصلية فإن نصبح:

$$(x-1) - (y-3) = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

بوضع $r=1$ فى المعادلة (4) نجد أن معادلة المحور الصغير هى:

$x' + y' = 0$ وتكون معادلة المحور الصغير بالنسبة للمحاور الأصلية هى:

(1) بعد البؤرة عن المركز = $ae = c$ (2) بعد الدليل عن المركز $\frac{a}{e}$



إذا فرضنا أن F_1, F_2 البؤرتين فإنه لحساب احداثيات البؤرتين نعلم أن

$$O'F_1 = O'F_2 = ae = 2(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}$$

وحيث أن ميل المحور الكبير يساوى 1 أى أن زاوية ميله $\frac{\pi}{4}$ فإن

$$x_{F_2} = x_1 + O'F_1 \cos\theta = 1 + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{3}/2$$

$$y_{F_2} = y_1 + O'F_1 \sin\theta = 3 + \sqrt{3}/2 ,$$

أى أن احداثيات البؤرة F_2 هى $(1+\sqrt{\frac{3}{2}}, 3+\sqrt{\frac{3}{2}})$ و احداثيات البؤرة F_1 هى $(1-\sqrt{3}/2, 3-\sqrt{3}/2)$. لإيجاد معادلة كل من الدليلين، نعلم أن الدليل يوازى المحور المنصف ويبعد عن مركز القطع مسافة a/e وبذلك يمكن وضع معادلة الدليل على الصورة : $x + y + c = 0$

وتحدد "c" من الشرط أن بعد مركز القطع (1,3) عن كل من الدليلين يساوى $\frac{4}{\sqrt{3}}$:

$$\therefore \frac{1+3+c}{\sqrt{2}} = \pm\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = 4(\sqrt{\tfrac{2}{3}} - 1) , -4(\sqrt{\tfrac{2}{3}} - 1)$$

أى أن معادلتى الدليلين هما:

$$x + y - 4(\sqrt{2/3} - 1) = 0 \quad , \quad x + y + 4(\sqrt{\tfrac{2}{3}} - 1) = 0$$

مثال (2): إثبت أن المعادلة

$$11x^2 + 24xy + 4y^2 - 2x + 16y + 11 = 0 \quad \ldots (1)$$

تمثل قطعاً زائداً ثم أوجد احداثيات مركزه وطول محوره القاطع ومعادلة

كل من محوريه الرئيسيه ومعادلة خطيه التقاربيه ثم ارسمه

الحل: الاختبار

$$\Delta = \begin{vmatrix} 11 & 12 & -1 \\ 12 & 4 & 8 \\ -1 & 8 & 11 \end{vmatrix} \neq 0$$

$h^2 = (12)^2 = 144$, $ab = 11(4) = 44 \Rightarrow h^2 > ab$

وهذا يثبت أن المعادلة (١) تمثل قطعا زائديا.

أولا: مركز القطع o'

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 : 11x + 12y - 1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 : 3x + y + 2 = 0 \end{array}\right] \Rightarrow o'(-1,1)$$

ثانيا: نقل المحاور إلى النقطة o':

نأخذ المعادلة (١) الصورة

$$-\frac{11}{20}x'^2 - \frac{6}{5}x'y' - \frac{1}{5}y'^2 = 1 \quad \ldots (2)$$

ثالثا: تقاطع (2) مع الدائرة:

$$\frac{x'^2}{r^2} + \frac{y'^2}{r^2} = 1 \quad \ldots (3)$$

فنحصل على

$$\left(\frac{1}{r^2} + \frac{11}{20}\right)x'^2 + \frac{6}{5}x'y' + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{5}\right)y'^2 = 0 \quad \ldots (4)$$

المعادلة (4) تمثل خطين متقيين منطبقين عندما

$$\left(\frac{1}{r^2} + \frac{11}{20}\right)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4} \text{ or } -1$$

أى أن طول المحور القاطع يساوى 4 ونحصل على معادلته بوضع $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{4}$ فى (4) فنجد أن $4x' + 3y' = 0$ وبالنسبة للمحاور الأصليه تصبح

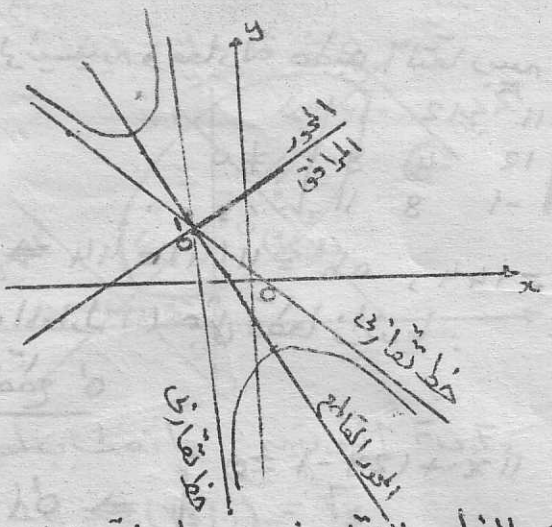
$$4x + 3y + 1 = 0$$

وبوضع $\frac{1}{r^2} = -1$ فى (4) نحصل

$$3x - 4y = 0$$

فتكون معادلة المحاور المرافقه بالنسبة للمحاور الأصليه هى:

$$3x - 4y + 7 = 0$$



حيث أن المعادلتين للخطين التقاربين هي معادلة من الدرجة الثانية وتختلف عن معادلة القطع (1) في حدها المطلق فقط فإنه يمكن كتابتها على الصورة

$$11x^2+24xy+4y^2-2x+16y+c=0 \quad (5)$$

ويتعين "c" بتطبيق الخاصية أن الخطين التقاربين يمران بمركز القطع

$$11(-1)^2+24(-1)(1)+4(1)^2-2(-1)+16(1)+c=0 \Rightarrow c=-9$$

ويمكن إيجاد "c" بتطبيق الشرط أن المعادلة (5) تمثل زوج من المستقيمات

$$\Delta=\begin{vmatrix} 11 & 12 & -1 \\ 12 & 4 & 8 \\ -1 & 8 & c \end{vmatrix}=0 \Rightarrow c=-9$$

وبذلك تكون معادلة الخطين التقاربين للقطع هي :

$$11x^2+24xy+4y^2-2x+16y-9=0$$

مثال (٣) : إثبت أن المعادلة $3x^2+8xy-3y^2+4x+2y=0$ تمثل قطعا زائدا قائما وأوجد معادلة كل من محوري القطع وطول محوره القاطع ومعادلة كل من الدليلين ثم ارسمه .

الحل : سوف نجد أن $a+b=0$ & $h^2>ab$, $\Delta\neq 0$ وهذه تثبت أن هذه المعادلة تمثل قطعا زائدا قائما .

كما سبق أن إحداثيات المركز هى $O'\equiv(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$ وأن معادلة القطع بالنسبة لمحورين يمران بمركز القطع هى :

$$3x'^2+8x'y'-3y'^2=1 \quad \ldots(1)$$

نأخذ معادلة الدائرة المتحدة المركز مع القطع (1) على الصورة

$$x'^2/r^2+y'^2/r^2=1 \quad \ldots(2)$$

بحل (1) ، (2) معًا نجد أن

$$(3-\frac{1}{r^2})x'^2+8x'y'-(3+\frac{1}{r^2})y'^2=0 \quad \ldots(3)$$

المعادلة (3) تمثل خطين مستقيمين منطبقين عندما

$$-(3-\frac{1}{r^2})(3+\frac{1}{r^2})=16 \Rightarrow \frac{1}{r^2}=\pm 5$$

∴ طول المحور القاطع يساوى $2/\sqrt{5}$. لإيجاد معادلة هذا المحور نضع $\frac{1}{r^2}=5$ فى (3) فتعطى بالنسبة لمحوريه مارين بمركز القطع بالمعادلة $x'-2y'=0$ وهذه تصبح بالنسبة للمحاور الأصلية على الصورة $x-2y=0$ كذلك يمكن إيجاد معادلة المحور المرافق بالنسبة للمحورية الأصلية فى $2x+y+1=0$

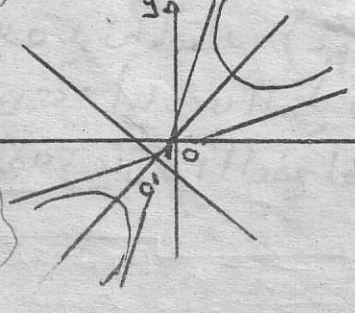
∴ معادلة الدليل هى $2x+y+c=0$. حيث تتعين c من الشرط أن بعد مركز القطع عن كل من الدليلين يساوى $\pm a/e$ حيث e البعد المتوسط المركز وتعطى بالعلاقة $b^2=a^2(e^2-1)$ ومنها نجد أن

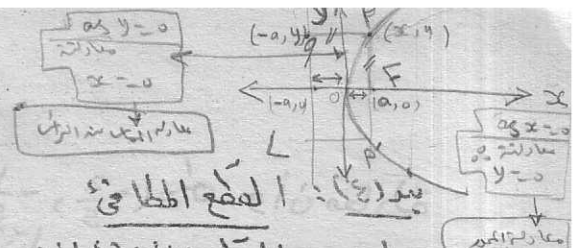
$$\therefore \frac{2(-2/5)+(-1/5)+c}{\sqrt{4+1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2}} \Rightarrow \quad \therefore e=\sqrt{2}$$

$$c=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

وعلى ذلك تكون معادلتا الدليلين هما

$$2x+y+1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$





بند (٤) : القطع المكافئ

لرسم القطع المكافئ الذى معادلته على الصورة

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \quad \cdots (1)$$

يلزم تعيين معادلة كل من محوره ① والمماس عند الرأس ② وطول وتره البؤرى العمودى ③ ، وحيث أنه فى حالة القطع المكافئ يكون فى المعادلة (1) الشرط $h^2 = ab$ وهذا يعنى أن حدود الدرجة الثانية تكون مربعا كاملا ، لذلك يمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة

$$(\alpha x + \beta y)^2 = -2fx - 2gy - c$$

أو

$$(\alpha x + \beta y + \lambda)^2 = 2(\alpha\lambda - f)x + 2(\beta\lambda - g)y + \lambda^2 - c \quad \cdots (2)$$

ونختار λ بحيث يتعامد المستقيمان

$$\alpha x + \beta y + \lambda = 0 \quad \cdots (3)$$

$$2(\alpha\lambda - f)x + 2(\beta\lambda - g)y + \lambda^2 - c = 0 \quad \cdots (4)$$

وشرط التعامد هو :

$$\alpha(\alpha\lambda - f) + \beta(\beta\lambda - g) = 0$$

الذى نتحدد منه قيمة λ وبالتعويض عنها فى المعادلة (3) نحصل على معادلة محور القطع ① وبالتعويض أيضا عن λ فى (4) نحصل على معادلة المماس ② للقطع عند الرأس ولتكن

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$$

وأخيرا يمكن كتابة معادلة القطع (2) على الصورة

$$\left(\frac{\alpha x + \beta y + \lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)^2 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}\right)$$

وبذلك يكون المقدار $\left(\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)$ هو طول الوتر البؤرى العمودى ③ أما رأس القطع فهو نقطه تقاطع المستقيمين (3) & (4)

ملاحظة : يمكن رسم القطع المكافئ بعد تعيين معادلتى المحور والمماس

(**)

$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} = \frac{x+a}{1}$ — بتربيع — $y^2 = 4ax$ — قاعدة صورة

عند الرأس وطول الوتر البؤري العمودي كما يمكن إيجاد معادلة الدليل للقطع وحساب إحداثيات بؤرته بالرجوع إلى خواص القطع في صورته البسيطة:

أمثلة توضيحية:

مثال (1): أوجد معادلة القطع المكافئ الذي طول وتره البؤري العمودي هو $\sqrt{5}$ ومعادلة محوره $2x-y+1=0$ ومعادلة المماس عند رأسه هي $x+2y+3=0$. أوجد إحداثيات كل من رأس القطع وبؤرته ومعادلة الدليل.

الحل: هناك قطعان يحققان شروط هذه المسألة ومعادلتاهما

$$\left(\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \pm\sqrt{5}\left(\frac{x+2y+3}{\sqrt{5}}\right) \quad \ldots (1)$$

وبأخذ الإشارة الموجبة في الطرف الذي يمين تصبح معادلة أحد القطعين على الصورة $4x^2+y^2-4xy-x-12y-14=0$

وحل المعادلتين $2x-y+1=0$ & $x+2y+3=0$

نحصل على إحداثيات رأس القطع $V \equiv (-1,-1)$. وحيث أن زاويه ميل محور القطع هي $\tan^{-1}2$ تكون إحداثيات البؤرة F هي

$$\left(-1+\sqrt{5}/4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}, -1+\sqrt{5}/4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \equiv \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

ومعادلة الدليل هي $x+2y+c=0$

وتعيين c من الشرط أن بعد رأس القطع عن الدليل يساوي $\frac{\sqrt{5}}{4}$

$$\therefore \frac{-1-2+c}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{4} \Rightarrow c = \frac{17}{4}$$

∴ معادلة الدليل هي: $4x+8y+17=0$

بالمثل في حالة أخذ الإشارة السالبة نحصل على قطع آخر يمكن دراسته بنفس الطريقة

مثال (2): إثبات أن المعادلة

$$16x^2-24xy+9y^2-44x-42y+49=0$$

تمثل قطعا مكافئا ثم أوجد معادلة محوره ومعادلة المماس عند الرأس و طول الوتر البؤري العمودي وإحداثيات رأس القطع. ثم إرسمه.

الحل: الإختبار $\Delta = \begin{vmatrix} 16 & -12 & -22 \\ -12 & 9 & -21 \\ -22 & -21 & 49 \end{vmatrix} \neq 0$

$h^2 = (-12)^2 = 144$ & $ab = (16)(9) = 144 \Rightarrow h^2 = ab$

وهذا يثبت أن المعادلة المعطاة تمثل قطعا مكافئا. نكتب معادلته على الصورة

$$(4x - 3y + \lambda)^2 = 4(11+2\lambda)x + 6(7-\lambda)y + \lambda^2 - 49$$

و المستقيمان:

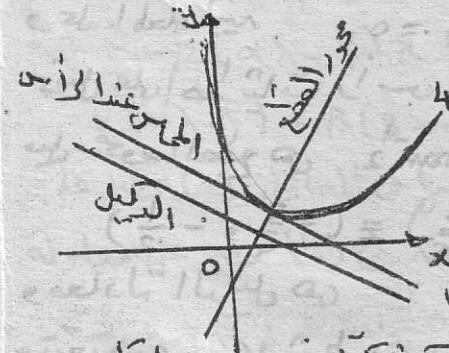
$$4x - 3y + \lambda = 0 \quad \& \quad 4(11+2\lambda)x + 6(7-\lambda)y + \lambda^2 - 49 = 0$$

يكونان متعامدان عندما

$$16(11+2\lambda) - 18(7-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

∴ معادلة محور القطع هي:

$$4x - 3y - 1 = 0 \quad \ldots (1)$$



معادلة المماس عند الرأس هي:

$$3x + 4y - 4 = 0 \quad \ldots (2)$$

وتكون رأس القطع هي نقطة تقاطع (1) ، (2) (Vertex)

ويمكن كتابة معادلة القطع على الصورة $v \equiv (0.64, 0.52)$. ويمكن كتابة معادلة القطع على

$$\left(\frac{4x-3y-1}{5}\right)^2 = \frac{5 \times 12}{25} \left(\frac{3x+4y-4}{5}\right)$$

ومنها نجد أن طول الوتر البؤري العمودي يساوي $12/5$.

تمارين عامة

١- حدد نوع كل من القطاعات المخروطية الآتية مع رسم كلا منها

(i) $2x^2 - 2xy + y^2 - 2y = 0$

(iii) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 20x = 0$.

(iii) $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 6x - 12y - 36 = 0$.

(iv) $9x^2 + 6xy + y^2 + 2x + 3y - 8 = 0$.

(v) $3x^2 - 5xy - 5y^2 + 5x + 11y - 8 = 0$.

(vi) $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 18x - 14y + 9 = 0$.

(c) اثبت أن المعادلتين

(i) $x^2 - 5xy + 3y^2 + 11x - 21y + 26 = 0$

(ii) $15x^2 + 8xy - 16y^2 - 8x - 32y - 48 = 0$

يمثلان قطعا زائديا ثم أوجد معادلة كل من المحاور وكذلك المعادلتين المشتركة للخطوط التقاربية مع حساب إختلاف المركزي لكل منهما .

(٢) اثبت أن كل من المعادلات الآتية

(i) $4x^2 - 4xy + y^2 - x - 12y - 14 = 0$.

(ii) $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x + 3y - 4 = 0$.

(iii) $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 2x - 29y - 1 = 0$

تمثل قطعا مكافئا . أوجد معادلة محوره ومعادلة المماس له عند الرأس واحداثيات رأسه وبؤرته وطول وتره البؤري العمودي ثم إرسمه .

٤- أوجد طول كل من محور القطع الناقص مع حساب مساحته

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 7 = 0$$

٥- إثبت أن المعادلة

$$36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$$

تمثل قطعا ناقصا وارسمه مبينا مركزه وطول ومعادلة كل من محوريه و احداثيات بؤرتيه ومعادلة كل من الدليلين .

$C_1 + \lambda C_2 = 0$

a group of circles passing through the line of intersection of C_1 and C_2

κ البعد بين المركزين

$\kappa > \lambda_1 + \lambda_2$ متقاطعان

$\kappa = \lambda_1 + \lambda_2$ متماسان

$\kappa < \lambda_1 + \lambda_2$ متباعدان

بند(٥): الدائرة

تمثل المعادلة العامة

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \quad \cdots (1)$$

دائرة إذا تحقق الشرطان: (i) $a = b$ & (ii) $h = 0$

ففي هذه الحالة تأخذ المعادلة (1) الصورة

$$ax^2 + ay^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \quad \cdots (2)$$

بقسمة (2) على a فتأخذ الصورة

$$x^2 + y^2 + 2Fx + 2Gy + C = 0$$

باستخدام فكرة اكمال المربع تأخذ المعادلة الأخيرة الصورة

$$(x+F)^2 + (y+G)^2 = F^2 + G^2 - C \quad \cdots (3)$$

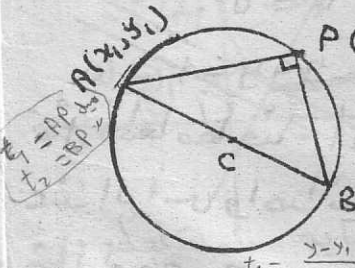
المعادلة (3) تمثل دائرة مركزها $(-F, -G)$ ونصف قطرها

$$\sqrt{F^2 + G^2 - C}$$

(i) معادلة الدائرة المعلوم قطرها يصل بين النقطتين A, B:

ولتكن $P(x,y)$ أي نقطة على محيط الدائرة:

من خواص الدائرة أن ΔAPB قائم الزاوية عند P ومن هذا نحصل على



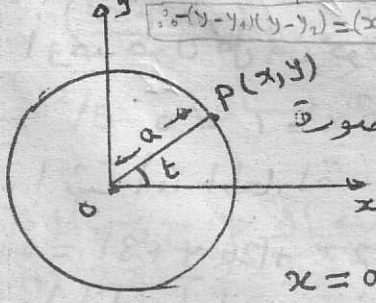
$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

وهي المعادلة المطلوبة

$t_1 = \frac{y-y_1}{x-x_1} = -\frac{x-x_2}{y-y_2} = -\frac{1}{t_2}$

$\therefore -(y-y_1)(y-y_2) = (x-x_1)(x-x_2)$

(ii) الصورة البارامترية للدائرة:



إذا اعتبرنا معادلة الدائرة على الصورة

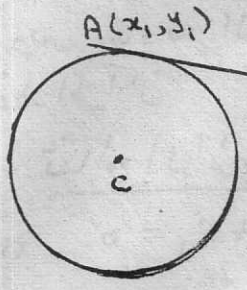
$$x^2 + y^2 = a^2$$

فإن الصورة البارامترية لها هي

$$x = a\cos t \quad \& \quad y = a\sin t$$

طول المماس للدائرة المرسوم من النقطة (x_1, y_1) خارج الدائرة $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2fx_1 + 2gy_1 + c}$

(iii) معادلة المماس لدائرة عند النقطة $A(x_1,y_1)$:



تعبر الدائرة

$$x^2+y^2+2fx+2gy+c=0$$

حيث النقطة A تقع على محيط الدائرة فتكون معادلة المماس $\overleftrightarrow{AP}$ لدائرة عند نقطة A هي :

$$x_1x+yy_1+f(x+x_1)+g(y+y_1)+c=0$$

وذلك لأن:

إذا كانت $F(x,y)=x^2+y^2+2fx+2gy+c=0$

فإن $\frac{dF}{dx}\Big|_A = 2x+2yy'+2f+2gy'=0$

$$\therefore y'_A = -\frac{x_1+f}{y_1+g}$$

= ميل المماس عند A

= $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ حيث P أي نقطة على المماس $\overleftrightarrow{AP}$

$$\therefore -(x_1+f)(x-x_1) = (y_1+g)(y-y_1) \Rightarrow$$

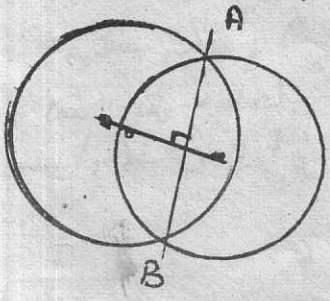
$$xx_1+yy_1+fx+gy = x_1^2+y_1^2+fx_1+gy_1$$

شرط وقوع A على الدائرة

$$\Rightarrow$$

$$x_1x+y_1y+f(x+x_1)+g(y+y_1)+c=0$$

(iv) مجموعات الدوائر : ١- معادلة المحور الأساسي :



اعتبر الدائرتين :

$$C_1: x^2+y^2+2f_1x+2g_1y+c_1=0 \quad \cdots (1)$$

$$C_2: x^2+y^2+2f_2x+2g_2y+c_2=0 \quad \cdots (2)$$

معادلة ~~وتر التقاطع~~ هي $C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow$

$$2(f_1 - f_2)x + 2(g_1 - g_2)y + C_1 - C_2 = 0$$

وهي معادلة الوتر AB ويسمى ~~وتر التقاطع~~ الوتر الأساسي وهو عمودي على خط المراكز

i.e. $k^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$

ب- تقاطع الدائرتين على التعامد:

$$x^2 + y^2 + 2f_1 x + 2g_1 y + C_1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2f_2 x + 2g_2 y + C_2 = 0 \quad (2)$$

$\|O_1O_2\|^2 = r_1^2 + r_2^2$

يقال أن الدائرتين تتقاطعان على التعامد إذا كان مربع البعد بين المركزين يساوي مجموع مربعي أنصاف الأقطار أي أن

$$(-f_1 + f_2)^2 + (-g_1 + g_2)^2 = f_1^2 + g_1^2 - C_1 + f_2^2 + g_2^2 - C_2 \Rightarrow$$

$$-2f_1f_2 - 2g_1g_2 = -C_1 - C_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{f_1f_2 + g_1g_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)}$$

ج- المحور الأساسي:

المحور الأساسي لدائرتين C_1 (مركزها Q_1 ونصف قطرها R_1) C_2 (مركزها Q_2 ونصف قطرها R_2) يعرف بأنه المحل الهندسي لنقطة P بحيث يتحقق الشرط

$$\overline{PQ_1}^2 - R_1^2 = \overline{PQ_2}^2 - R_2^2 \Rightarrow$$

$$C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow$$

$$2(f_1 - f_2)x + 2(g_1 - g_2)y + (C_1 - C_2) = 0$$

وهذه هي معادلة المحور الأساسي للمعادلتين C_1 & C_2 سواء كانت الدائرتين متقاطعتين أو غير متقاطعتين.

$$(x + f_1)^2 + (y + g_1)^2 - (f_1^2 + g_1^2 - C_1) = (x + f_2)^2 + (y + g_2)^2 - (f_2^2 + g_2^2 - C_2)$$

$C_1 \sim \lambda C_2$

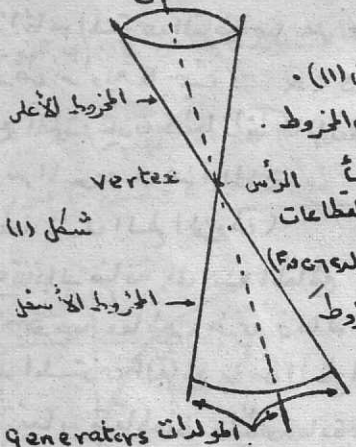
الباب الرابع
القطاعات المخروطيه "Conic Sections"

تعريف:

القطع المخروطي العام هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث أن النسبة بين بعدها عن نقطة ثابته وبعدها عن خط ثابت تساوى دائما مقدارا ثابتا.

وتسمى النقطة الثابته بؤرة (Focus) المنحنى وتسمى رمزلها بالحرف F والخط الثابت الدليل (Directrix) وتسمى النسبه الثابته بالاختلاف المركزى "Eccentricity" ويرمز لها بالحرف e.

ويسمى الخط المستقيم المار بالبؤرة والعمودى على الدليل بمحور المنحنى والمحل الهندسى الذى عرفناه الآن يسمى بالقطع المخروطى لأنه فى الأصل ناشئ عن قطع مخروط دائرى قائم بمستوٍ ويمكننا توضيح هذا المعنى كالآتى:



شكل (١)

اعتبر سطح مخروطى دائرى قائم ومقلوبه (انظر شكل (١)).

ولكن لدينا مستوٍ ما قاطعا للمخروطين دون مروره برأس المخروط.

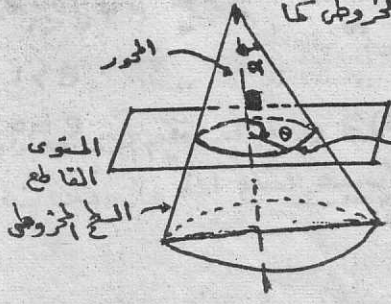
فنحصل على مقطعا إما قطع ناقص (أو دائرة) أو مكافئ أو زائد. ومن الدراسات الفريدة التى تمت بخصوص القطاعات المخروطيه ما قدمه العالم الرياضى اليونانى أبولونيوس (ولد ٢٦٥ ق م) حيث درس المستوى القاطع فى حالة تعامده مع مولد المخروط فى الحالات التاليه:

(i) عندما تكون زاويه الرأس قائمه
(ii) عندما " " حادة
(iii) عندما " " منفرجه

فوجد أنه المنحنى المقطوع من الحالات (i)، (ii)، (iii) على الترتيب: مكافئ، ناقص، زائد.

إذا كانت "θ" هى زاويه رأس السطح المخروطى الدائرى القائم فإنه

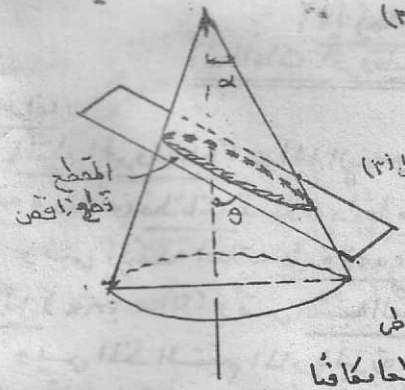
(i) إذا كان المستوى القاطع عموديا على محور السطح المخروطى كما بالشكل (٢) فإنه المقطع الحادث يكون دائرة،



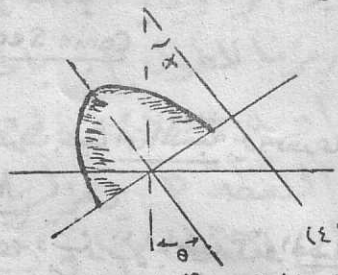
شكل (٢)

حيث θ هى الزاويه التى يصنعها المستوى القاطع مع المحور وهى قائمة فى هذه الحالة.

(٢) إذا كان المستوى القاطع يميل على المحور للسطح المخروطي بزاوية θ بحيث $\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$ فإنه المقطع الحادث يكون قطعا ناقصا كما بالشكل (٣)



شكل (٣)

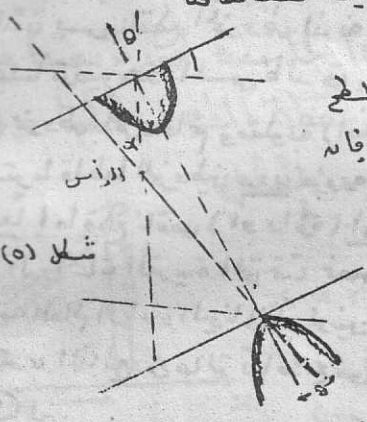


شكل (٤)

(٣) إذا كانه المستوى القاطع يميل على محور السطح المخروطي بزاوية θ تساوى α فإنه المقطع الحادث يكونه قطعا مكافئا كما بالشكل (٤).

(٤) إذا كانه المستوى القاطع يميل على محور السطح المخروطي بزاوية θ بحيث: $\alpha > \theta \geq 0$ فإنه المقطع الحادث يكون قطعا زائدا كما بالشكل (٥)

(ويكونه المستوى في هذه الحالة قاطعا لفرعي السطح المخروطي)



شكل (٥)

ملحوظة (١): بالإضافة إلى هذه المقاطع فإنه توجد قطاع أخرى في حالة مرور المستوى القاطع برأس السطح المخروطي ويكونه المقطع الحادث إما نقطة أو مستقيم أو مستقيمانه متقاطعان ويطلقه عادة على مثل هذه النوع من المقاطع "المقطوع المخروطي" والمقطوع تطبيقات هامة في مجالات: علم الفضاء، الديكور، الفلك، النظم الميكانيكية والكهربية وكذلك في العلوم العسكرية.

ملحوظة (٢): يمكن التعرف على المقطع الحادث تحليليا بالنظر إلى إختلافه المركزي "e" فإذا كانه:

(١) $e = 1$ سمي المقطع الحادث قطعا مكافئا "Parabola"
(٢) $e < 1$ " " " " ناقصا "Ellipse"
(٣) $e > 1$ " " " " زائدا "Hyperbola"
(٤) $e = 0$ " " " " دائرة "Circle"

ويمكن أن نستنتج من تعريف القطع المخروطي العام بأنه معادلة منحنى القطع الناتج من الدرجة الثانية في (x,y) وذلك لأنه:

لنفرض أنه $F(x_1,y_1)$ هي البؤرة و L هو الدليل وأنه e هي الاختلاف المركزي فإنه بناءً على هذا التعريف نحصل على:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = e\,\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \ldots (1)$$

حيث $P(x,y)$ نقطة على منحنى القطع الناتج، L معادلة $Ax+By+C=0$ هي .

واضح أن العلاقة (1) هي معادلة من الدرجة الثانية في (x,y) .

بند (1): القطع المكافئ (الشلجم)

(1) تعريف (1):

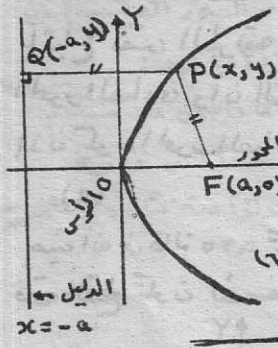
ليكن E^2 مستويا معلوما، F نقطة ثابتة، L مستقيما ثابتا في E^2. إن مجموعة النقط P في هذا المستوى والتي تحقق الشرط الآتي:

طول $\overline{PF}$ = طول العمود الساقط من P على المستقيم L .

يكون المحل الهندسي لمجموعة النقط P هو منحنى القطع المكافئ، ونسمي F ببؤرته و المستقيم L بدليله .

المعادلة القياسية للقطع المكافئ:

نفرض أنه E^2 هو مستوى الإحداثيات المتعامدة، وأن بؤرة القطع المكافئ هي النقطة $F(a,0)$ والدليل L هو المستقيم $x=-a$ ، حيث a عدد حقيقي ولا يساوي صفرا (أنظر الشكل (6)).



ونفرض أن النقطة $P(x,y)$ واقعة على القطع المكافئ، إذن $|\overline{FP}|=|\overline{PQ}|$ من التعريف (1) .

$$\Rightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+a)^2+(y-y)^2} \Rightarrow$$

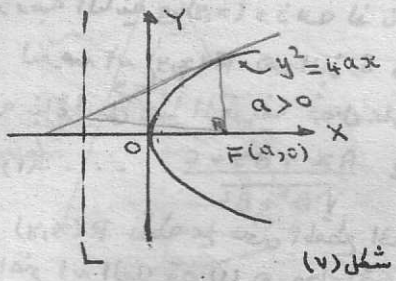
$$(x-a)^2+y^2=(x+a)^2 \Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2 = x^2+2ax+a^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 = 4ax} \quad \ldots (1)$$

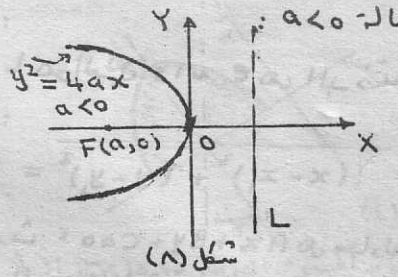
تمثل (1) معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(a,0)$ ودليله المستقيم الذي معادلته $x=-a$ ونعرف هذه المعادلة بالصورة القياسية للقطع المكافئ وذلك لأن

نقطة الأصل رأساً للقطع ، أحد محوري الإحداثيات محوراً للقطع .

يوضح الشكل (٧) القطع المكافئ عندما $a>0$ بينما يوضح الشكل (٨) القطع المكافئ في حالة $a<0$:



شكل (٧)

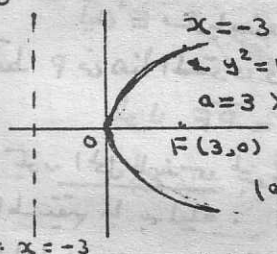


شكل (٨)

مثال (١) : أوجد إحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $y^2=12x$. ارسمه

الحل : قارن معادلة القطع المعطاه بالمعادلة (١) فنجد أن $4a=12$ ومنها نحصل على : $F\equiv(3,0)$ وأن معادلة الدليل هي $x=-3$

رأسه نقطة الأصل . القطع المكافئ كما بالشكل (٩) وذلك لأن $a>0$.

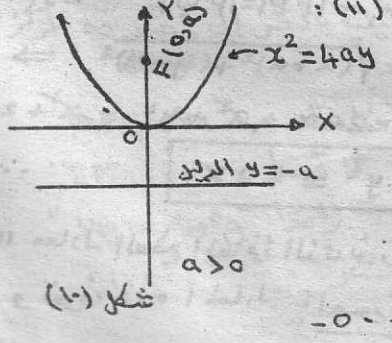


شكل (٩)

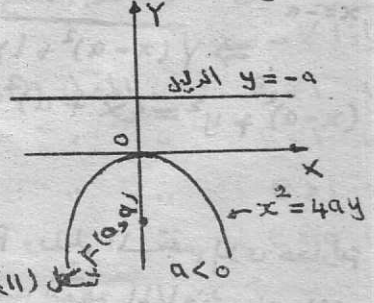
بتبديل المحورين السيني والصادي كل منهما مكان الآخر ، فيمكننا الحصول على صورة قياسية للقطع المكافئ باتباع نفس الطريقة السابق سردها . ففي هذه الحالة تكون البؤرة F على المحور الصادي وأن الدليل تكون معادلته هي "y = constant" والرأس هي نقطة الأصل. إذن يكون المحور الصادي محوراً للقطع المكافئ وتكون المعادلة (١) على الصورة :

$$x^2=4ay \quad \ldots (2)$$

حيث أنه في حالة $a>0$ تكون فتحة القطع المكافئ لأعلى كما بالشكل (١٠) بينما في حالة $a<0$ فإن فتحة القطع تكون لأسفل كما هو مبين بالشكل (١١) :



شكل (١٠)



شكل (١١)

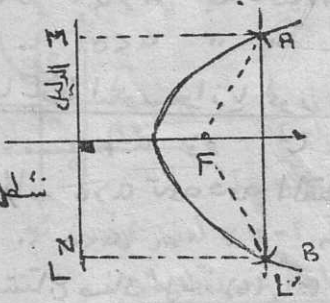
مثال (١): عين إحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $x^2=-6y$ ثم أرسمه.

الحل: قارن المعادلة المعطاه بالمعادلة (2) فنجد أن: $4a=-6 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$

$\therefore F(0,-3/2)$ وأن معادلة الدليل هي $y=+3/2$. نقطة الأصل رأسا للقطع وأن فتحة القطع لأسفل لأن $a<0$ ويكون كما بالشكل (١١) في حالة $a=-\frac{3}{2}$.

مثال (٢): إرسم القطع المكافئ هندسيا

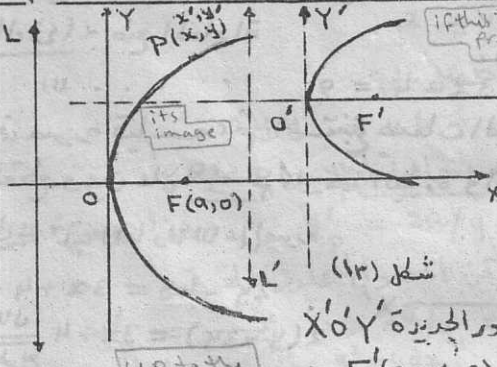
الحل: لتكن F البؤرة، L الدليل. يرسم محور هذا القطع المكافئ بإسقاط عمود من النقطة F على الدليل L. إرسم المستقيم L' العمودي على المحور. إركز بالفرجار في F وبفتحة تساوي المسافة بين المستقيمين L, L' ثم إرسم قاطعين للمستقيم L عند النقطتين A,B. إذن النقطتان A,B إحدى نقط المجموعة المكونة لنقط القطع المكافئ وذلك لأن $\overline{AF}=\overline{AM}$ & $\overline{BF}=\overline{BN}$



شكل (١٠)

وهذا يتفق مع تعريف القطع المكافئ. يمكن الحصول على نقط أخرى من نقط القطع المكافئ وذلك برسم مستقيمات أخرى // L ثم نتبع نفس الطريقة السابقة.

بند (٢): معادلة القطع المكافئ عندما إلى محورين موازيين لمحور القطع والمماس عند الرأس:



شكل (١٢)

اعتبر التحويل:

$T: (0,0) \longrightarrow (\alpha,\beta)$

(انظر بند نقل المحاور موازيه لنفسها)

فنجد أنه بناءً على هذا التحويل:

$\Rightarrow [x=x'+\alpha \; ; \; y=y'+\beta]$

رأس القطع المكافئ عندما إلى المحاور الجديدة $X'O'Y'$ هي $O'(\alpha,\beta)$ وإحداثيات البؤرة $F'(a+\alpha,\beta)$

بفرض أن (x',y') هي صورة النقطة (x,y) بالتحويل T فنجد أن المعادلة $y'^2=4ax'$ تأخذ الصورة:

$$(y-\beta)^2=4a(x-\alpha) \quad \ldots (3)$$

وهي معادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة (α,β) وبؤرته $F(a+\alpha,\beta)$ ومعادلة

دليله $x = -a$. ومعادلة محور تماثله $y = \beta$ كما هو بالشكل (١٥) . ومن الواضح أن محوره يوازى محور السينات وفتحته تكون متجهه نحو السينات الموجبه فى حالة $a > 0$ بينما تكون فتحته متجهة نحو السينات السالبه فى حالة $a < 0$.

بنفس الطريقه مع استخدام نفس التحويل T نجد أن المعادلة (2) تأخذ الصورة :

$$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta) \quad \ldots (4)$$

يمكننا أن نستنتج من المعادلتين (4) ، (3) بأنه يمكن كتابة معادلة القطع المكافئ الذى يكون محوره موازيا لأحد محورى الاحداثيات على احدى الصورتين التاليتين :

(i) عندما يكون المحور موازيا لمحور الصادات :

$$y = ax^2 + bx + c \quad ; \quad a \neq 0 \quad \ldots (5)$$

فإذا كان $a > 0$ تتجه فتحة القطع نحو الصادات الموجبه .

" " $a < 0$ " " " " " السالبة .

(ii) عندما يكون المحور موازيا لمحور السينات :

$$x = ay^2 + by + c \quad ; \quad a \neq 0 \quad \ldots (6)$$

فإذا كان $a > 0$ تتجه فتحه القطع نحو السينات الموجبة .

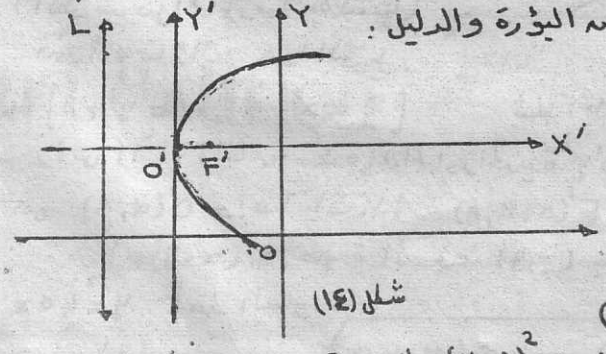
" " $a < 0$ " " " " " السالبة .

ولإستنتاج صفات كل من (6) ، (5) نضع المعادلة فى احدى الصور القياسيه كما سنوضح ذلك فى المثالين الآتيين :

مثال (٤) : ضع المعادلة

$$2y^2 - 4y - 3x - 4 = 0 \quad \ldots (1)$$

فى صورة قياسيه ، ثم استنتج صفات القطع المكافئ الذى تمثله . ارسم هذا القطع وعين على الرسم كل من البؤرة والدليل .



شكل (١٤)

الحل : نكتب المعادلة (1) على الصورة

$$2y^2 - 4y = 3x + 4 \Rightarrow$$

$$2(y^2 - 2y) = 3x + 4 \Rightarrow \text{بإكمال المربع}$$

$$2(y-1)^2 = 3x + 6 \Rightarrow$$

$$2(y-1)^2 = 3(x+2) \Rightarrow$$

$$(y-1)^2 = \frac{3}{2}(x+2) \quad \ldots (2)$$

وهى مشابهة للمعادلة : $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ حيث $a = \frac{3}{8}$ ؛ $\beta = 1$ ؛ $\alpha = -2$

تمثل المعادلة (2) قطعا مكافئا محوره يوازى محور السينات و الفتحه تتجه نحو السينات الموجبه (لان $a>0$) ورأسه النقطة $O'(-2,1)$ ، وان $O'F=\frac{3}{8}$. وان إحداثيات بؤرته F بالنسبه إلى المحاور الأصليه هى $(1,-1\frac{5}{8})=(1,-\frac{13}{8})$ وكذلك فإن معادلة دليله هى $x=-\frac{3}{2}-2=-2\frac{3}{8}$ (انظر الشكل (١٥)).

مثال (٥): ضع المعادلة

$$y=2x^2+4x+3 \quad \ldots (1)$$

فى الصورة القياسيه لمعادلة القطع المكافئ ، واستنتج صفاته ثم ارسمه مع إيجاد بؤرته ودليله.

الحل:

$$y=2(x^2+2x)+3 \iff y-3=2(x+1)^2-2 \iff$$

$$(x+1)^2=\tfrac{1}{2}(y-1) \quad \ldots (2)$$

المعادلة (2) مشابهة للمعادلة $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$

$4a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{8}$ وأن $\alpha=-1$ ، $\beta=1$.

إذن إحداثيات بؤرة القطع هى

$$(-1,\tfrac{1}{8}+1)=(-1,9/8)$$

ومعادلة الدليل هى: $L: y=-\frac{1}{8}+1=\frac{7}{8}$

الشكل (١٥)

رأس القطع $(1,-1)$ ومعادلة محور التماثل $x=-1$ (انظر شكل (١٥)).

بند (ب): معادلتى المماس والعمودى لقطع مكافئ عند نقطه عليه:

(3) لتكن معادلة القطع المكافئ على الصورة :

$$y^2=4ax \quad \ldots (1)$$

فاضل المعادلة (1) بالنسبة إلى x فنحصل على

$$2yy'=4a \Rightarrow y'=2a/y \quad \ldots (2)$$

P, on the praboola

① ١- إيجاد معادلة المماس للقطع (1) عند النقطة $P_1(x_1,y_1)$ عليه :

من (2) نجد أن $y'_{P_1}=2a/y_1$ وهذا هو ميل هذا المماس وبالتالى فإنه معادلته يمكن الحصول عليها كالآتى :

$$y'_{P_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow 2a/y_1=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow 2a(x-x_1)=y_1y-y_1^2$$

$y_1^2=4ax_1$

$$\Rightarrow 2a(x-x_1)=y_1y-4ax_1$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1y=2a(x+x_1)} \quad \ldots (3)$$

تمثل (3) معادلة المماس للقطع المكافئ (1) عند النقطة $P_1(x_1,y_1)$.

② ب - معادلة العمودى للقطع المكافئ (١) عند النقطه P_1 :

∵ ميل المماس عند P_1 يساوى $y_1/2a$ فإن ميل العمودى عليه عند النقطه P_1 يساوى $-y_1/2a$ - ومنها نجد أن معادلة العمودى تأخذ الصورة :

$$-\frac{y_1}{2a} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow \boxed{\frac{y-y_1}{y_1} + \frac{x-x_1}{2a} = 0} \quad \cdots (4)$$

look

مثال (٦) : أوجد معادلتى المماس والعمودى للقطع المكافئ $y^2 = 4x$ عند النقطه $(1,2)$.

الحل : معادلة المماس للقطع المكافئ عند النقطه $(1,2)$ هى

$$2y = 2(x+1) \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

ومعادلة العمودى هى

$$\frac{y-2}{2} + \frac{x-1}{4} = 0 \Rightarrow 2y + x - 5 = 0$$

② (4) بند (أ) : معادلة القطع المكافئ الذى بؤرته النقطة (x_1,y_1) ودليله المستقيم $ax+by+c=0$:

لتكن $P(x,y)$ نقطه على القطع المكافئ المطلوب . من تعريف القطع المكافئ نجد أن $\overline{P_1P}$ يساوى بعد النقطه P عن دليله أى أن

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = \left(\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 \quad \cdots (5)$$

look

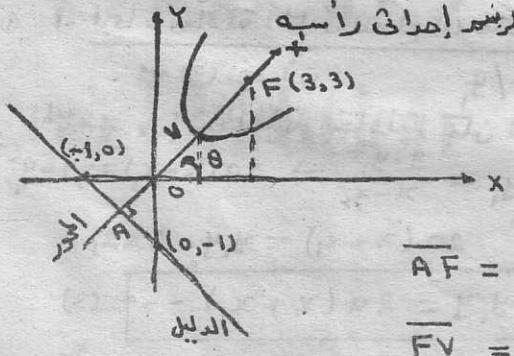
تمثل (٥) معادلة القطع المكافئ المطلوب .

مثال (٧) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذى بؤرته النقطه $(3,3)$ ودليله المستقيم $x+y+1=0$. أوجد كذلك إحداثى رأس القطع و

الحل : معادلة القطع المكافئ هى

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{x+y+1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 - 14x - 14y + 35 = 0$$

•• إرسم القطع المكافئ ثم حدد من الرسم إحداثى رأسه



∵ ميل الدليل يساوى -1 فإنه ميل محور القطع يساوى "١" أى أن : $\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

لتحديد إحداثيات رأس القطع V :

$$\overline{AF} = \frac{3+3+1}{\sqrt{2}} = 7/\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\overline{FV} = \frac{1}{2}\overline{AF} = \frac{7}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$x_V = 3 - \frac{7}{2\sqrt{2}}\cos\theta = 3 - 7/4 = 5/4 \quad \& \quad y_V = 3 - \frac{7}{2\sqrt{2}}\sin\theta = 3 - \frac{7}{4} = 5/4$$

Look → equation V can be put on the form
$x m^2 - y m + a = 0$ "which represent tow tangents of slope (m_1) & (m_2)"

-oo-

∴ إحداثيات الرأس هى $V(5/4, 5/4)$.

بند (أ): إيجاد معادلة المماس الذى ميله m للقطع المكافئ (1) :

(5) لتكن معادلة المماس على الصورة

$$y = mx + c \quad \ldots (i)$$

وأن $P_1(x_1, y_1)$ هى نقطه تماس (i) مع القطع $y^2 = 4ax$ ولكن بما أن معادلة المماس للقطع (1) عند النقطة P_1 هى

$$y_1 y = 2a(x + x_1) \quad \ldots (ii)$$

فإن المعادلتين (ii) & (i) يمثلان نفس المستقيم وبالتالى نجد أن

$$\left(m = \frac{2a}{y_1} \quad \& \quad c = 2a x_1 / y_1 \right) \quad \ldots (iii)$$

$$\therefore (iii) \Rightarrow x_1 = c/m \quad \& \quad y_1 = 2a/m \quad \ldots (iv)$$

وبالتالى فإن معادلة المماس المطلوبه تكون على الصورة

$$\boxed{y = mx + \frac{a}{m}} \quad \ldots (v)$$

وتكون إحداثيات نقطه التماس هى $P_1\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ وذلك لأن P_1 تقع على القطع المكافئ (1) فتحقق معادلته فنجد أن

$$\frac{4a^2}{m^2} = 4a x_1$$

ملحوظة: معادلة العمودى المناظر عند P_1 هى :

$$\left(y - \frac{2a}{m}\right) = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{a}{m^2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{m^3 y + m^2 x - a(1 + 2m^2) = 0} \quad \ldots (vi)$$

Put $m = -\frac{1}{t}$

واضح من المعادلة (vi) أنها من الدرجة الثالثه فى "m" ويكون لها :

I-P - ثلاثه جذور حقيقيه وفى هذه الحالة تكون النقطه P_1 داخل القطع

أو

II-P - جذر حقيقى واحد وجذران تخيليان وفى هذه الحالة تكون النقطه P_1 تقع على القطع

ب - جذر واحد حقيقى وفى هذه الحالة تكون النقطه P_1 خارج القطع

بأخذ $t = \frac{1}{m}$ فنجد أن إحداثيات النقطه P_1 هى $(at^2, 2at)$. وحيث أن النقطة P_1 إختيارية على القطع المكافئ (1) فإن العلاقات :

$$\boxed{x = at^2 \; ; \quad y = 2at} \quad \ldots (vii)$$

تعرف بالصورة البارامترية للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$.

مثال (٨): إذا كان العمودي عند النقطة t يقابل القطع مرة ثانية عند النقطة t_1 فإن

$$t_1 + t + \frac{2}{t} = 0$$

الحل: معادلة العمودي للقطع عند النقطة t هي:

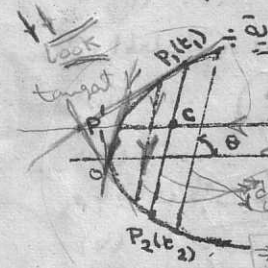
$$tx + y - 2at - at^3 = 0 \quad \dots (1)$$

لنفرض أن P_1 هي نقطة تلاقي (1) مرة ثانية مع القطع فإن $P_1(at_1^2, 2at_1)$ وتحقق (1):

$$t t_1^2 + 2t_1 - 2t - t^3 = 0 \Rightarrow t(t_1^2 - t^2) + 2(t_1 - t) = 0 \Rightarrow$$

$$(t_1 - t)(t(t_1 + t) + 2) = 0 \Rightarrow t_1 + t + \frac{2}{t} = 0 \quad (\text{لأن } t \neq t_1)$$

بند (أ): المحل الهندسي لمنتصفات مجموعة من الأوتار المتوازية:



شكل (١٦)

لتكن P_1, P_2 هما نهايتي إحدى هذه الأوتار المتوازية (انظر الشكل (١٦)). وكانت t_1, t_2 هما إحداثياتها على الترتيب. إذن معادلة الوتر P_1P_2 هي:

$$2x - (t_1 + t_2)y + 2at_1t_2 = 0 \quad \dots (1)$$

لنفرض أن m هي الميل المشترك ($m = \tan\theta$) لهذه المجموعة المتوازية من الأوتار.

نستنتج من (1) أن: $m = 2/(t_1 + t_2) \quad \dots (2)$

فإذا كانت "c" هي منتصف الوتر P_1P_2 فإن إحداثياتها هي

$$\left(\frac{a}{2}(t_1^2 + t_2^2), a(t_1 + t_2)\right)$$

وبالتالي باستخدام (2)، فإن الإحداثي الصادي للنقطة c هو $\frac{2a}{m}$ وهو كمية ثابتة. إذن المحل الهندسي لمنتصفات هذه المجموعة من الأوتار المتوازية ذات الميل "m" هي:

$$\boxed{y = 2a/m} \quad \dots (3)$$

المعادلة (3) عبارة عن معادلة خط مستقيم موازٍ المحور القاطع ويقابله في النقطة $P_1'\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$. نستنتج من ذلك أن P_1'. كما يعرف الخط المستقيم (3) بالقطر المرافق للوتر P_1P_2.

بند (ب): معادلة وتر التماس للمماسين المرسومين من النقطة P' للقطع المكافئ:

لتكن $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ هما نقطتي التماس. معادلة المماسين للقطع عند النقطتين P_1، P_2 هما على الترتيب:

$$\Rightarrow y_1 y = 2a(x + x_1) \quad \& \quad \Rightarrow y_2 y = 2a(x + x_2)$$

وحيث أن هذان المماسين يتلاقيان عند النقطه P' فإنها تحقق معادلتيهما :

$$y_1 y' = 2a(x' + x_1) \quad \& \quad y_2 y' = 2a(x' + x_2)$$

instead of (x_1, y_1) & (x_2, y_2) put (x, y) any point on the line which we now call the cord of touch; since P_1 & P_2

ولكن هذه هى شروط وقوع النقطتين P_1, P_2 على الخط المستقيم :

$$y' y = 2a(x + x') \quad \text{...(i)}$$

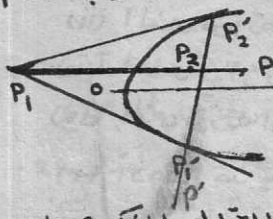
Solve it

i.e. since this forms of a straight line and both P_1 and P_2 Solve it ⇒ it is the form of line P_1P_2

المعادلة (i) تمثل معادلة وتر التماس المطلوبه .

(8) بند (ز) : القطب والخط القطبى :

لنفرض أن P' نقطة ما داخل أو خارج القطع المكافئ . اى خط مارا بالنقطة P' يقابل القطع فى النقطتين P_1', P_2' .



شكل (١٧)

تعريف : المحل الهندسى لنقطة تقاطع المماسين المرسومين عند النقطتين P_1', P_2' عبارة عن خط مستقيم يعرف بالخط القطبى للنقطة P' "Polar line" .

إذا كانت P' مأخوذه خارج القطع وأن P_1 هى نقطة التقاطع المذكورة . إذن معادلة وتر التماس $P_1'P_2'$ هى :

$$y_1 y = 2a(x + x_1)$$

distinguish between (y) above and (y) here

Point of intersection of the above tangents

Pole Point

ولكن هذا الوتر يمر بالنقطه P' وبالتالى فهى تحققه، اى أن

$$y_1 y' = 2a(x' + x_1)$$

see P_1 Solve it

إذن لجميع المستقيمات المارة بالنقطه P' فإن المحل الهندسى للنقطة P_1 هى :

$$y' y = 2a(x + x') \quad \text{...(i)}$$

تمثل المعادلة (i) الخط المستقيم P_1P_3 وهو مايعرف بالخط القطبى للنقطه P' بالنسبة للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$. وتسمى P' بقطب المستقيم (i) .

نتيجه : إذا مر الخط القطبى للنقطه P_1 بالنقطة P_2 فإنه الخط القطبى للنقطة P_2 يمر بالنقطة P_1 . نقول فى هذه الحالة أن P_1, P_2 نقطتان مترافقتان

ملاحظات :

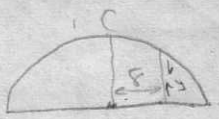
(١) المعادلة (i) هى نفس معادلة المماس عند النقطة P' عندما تقع على القطع .

(٢) إذا كانت P' خارج القطع فإنه الخط القطبى لها هو نفس معادلة وتر التماس للمماسين المرسومين من P' للقطع .

(٣) إذا كانت P' نقطة على القطع فإن الخط القطبى لهذه النقطة يصبح مماسا للقطع عند هذه النقطة .

(٤) يسمى المقدار $4a$ بطول الوتر البؤرى العمودى للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$.

4)



تمارين (١) :

(١) في كل من التمارين التاليه استنتج صفات القطع المكافئ وإرسمه بيانيا :

(i) $y^2+9x=0$; (ii) $x^2=8y$; (iii) $x^2=-11y$

(iv) $y^2=3x$; (v) $y=-3x^2+6x+11$;

(vi) $x=11y^2+33y-1$; (vii) $(y-5)^2=-4(x-1)$

(viii) $(x-3)^2=-6(y+2)$

(٢) أوجد معادلة القطع المكافئ لكل من التمارين التاليه ثم إرسمه

(i) الذى رأسه النقطه $(3,3)$ ودليله المستقيم $y=2$.

(ii) الذى بؤرته النقطة $(5,3)$ ودليله المستقيم $y+1=0$.

(iii) الذى يوازى المحور الصادى ويمر بالنقاط $(-2,-1)$ ، $(1,2)$ ، $(2,1)$.

(iv) الذى بؤرته النقطه $(1,2)$ ودليله المستقيم $x+y-2=0$

(٣) أوجد إحداثيات البؤرة ونقطه الرأس وطول الوتر المحورى لكل من :

(i) $y^2=4x-8$; (ii) $y^2=-6x+12$

(iii) $8y^2-x-8y+27=0$; (vi) $y^2=2x+3$

(٤) قوس على شكل قطع مكافئ طول قاعدته 24 قدما وإرتفاعه 18 قدما . أوجد إرتفاع القوس على بعد 8 اقدام من مركز قاعدته .

(٥) أوجد إحداثيات رأس وبورة وكذلك معادلتى المحور والدليل لكل من القطاعات الآتيه

(i) $x^2+2y=8x-7$; (ii) $y^2=4(x+y)$

(iii) $y^2-4y-4x+16=0$; (iv) $x^2+4x+4y+2=0$

(٦) أوجد معادلة القطع المكافئ الذى بؤرته النقطة $(2,2)$ ودليله المستقيم $3x+2y-6=0$. أوجد كذلك إحداثى رأسه وطول وتره البؤرى المحورى مع رسمه.

(٧) إثبت أن $y=x-x^2$ هو الحل الهندسى لنقطة تتحرك بحيث يكون بعدها عن النقطة $(\frac{1}{2},0)$ مساويا بعدها عن المستقيم $y=\frac{1}{2}$. ما الذى تمثله هذه المعادلة.

(٨) تتحرك نقطه p فى المستوى E^2 بحيث يكون طول المماس المرسوم منها للدائرة :

$$x^2+y^2=2ay$$

مساويا طول البعد الصادى للنقطة . إثبت أن الحل الهندسى للنقطة p هو قطع مكافئ .

بند(٢): القطع الناقص (الهليلجي):

(2-1) تعريف (١):

ليكن E^2 مستويا مفروضا، والنقطتان F_1, F_2 نقطتان ثابتتان في E^2. إن مجموعة النقط P في هذا المستوى والتي تحقق الشرط: $\overline{PF_1} + PF_2 = \text{constant}$.

تسمى قطعا ناقصا "Ellipse" وتسمى النقطتان F_1, F_2 بؤرتي "Foci" القطع الناقص

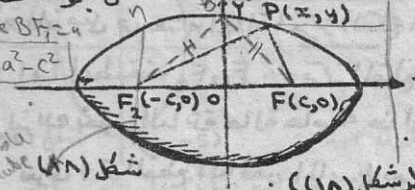
نفرض أن المقدار الثابت يساوي العدد الموجب $2a$ بحيث يكون أكبر من البعد بين البؤرتين، فإن مجموعة النقط P في هذا المستوى المحققة للشرط

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \quad \ldots (1)$$

تكون قطعا ناقصا.

القطعة المستقيمة المرسومة من نقطة على القطع الناقص لإحدى بؤرتيه تعرف باسم نصف القطر البؤري "Focal radius". وهكذا يعين التعريف (١) بأنه مجموع أطوال نصفي قطري البؤريين المرسومين من النقطة P لبؤرتي القطع تساوي المقدار $2a$.

ويمكننا تصور رسم القطع الناقص بربط خيط بطريقة محكمة بقلم رصاص ويكون طول الخيط مساويا للمقدار $2a$ مع تثبيت نهايتيه عند البؤرتين F_1, F_2. بتحريك القلم الرصاص مع جذب الخيط فإنه يرسم مجموعة النقط P التي تكون بدورها تكمل مجموعة نقط القطع الناقص (انظر شكل (١٨)).



شكل (١٨)

نفرض أن المسافة بين البؤرتين:

$$\overline{F_1F_2} = 2c \quad \text{(تسمى البعد البؤري)}.$$

ومن المثلث PF_2F_1 نجد أن $a > c$ (انظر شكل (١٨)).

المعادلة البسيطة للقطع الناقص:

نفرض أن E^2 هو مستوى الإحداثيات المتعامدة وأن $F_1(c,0)$ ، $F_2(-c,0)$ وأن النقطة $P(x,y)$ تقع على القطع الناقص وأن:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2} \xrightarrow[\text{مع الاختصار}]{\text{بالتربيع}}$$

$$x^2 \times \frac{a^2-c^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \quad ; \quad a^2 - c^2 > 0 \quad (a > c \text{ لأنه})$$

وبفرض أن $b^2 = a^2 - c^2$ وبقسمة طرفي المعادلة السابقة على b^2 نحصل على:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \ldots (2)$$

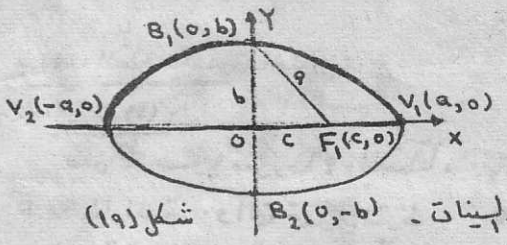
من المعادلة (٢) يمكن الحصول على النتائج الآتية:

$d+g=2a \Rightarrow g=2a-d$ ، $d^2+4c^2=(2a-d)^2$

$=4a^2-4ad+d^2$

$\therefore a^2-c^2=ad=b^2$

$\therefore d=\frac{b^2}{a}$ *



شكل (١٩)

(١) واضح أنه لكل قيمة تأخذها x ، يوجد قيمتان للمتغير y هما: $\pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ " وهذا يدل على أن القطع الناقص متماثل بالنسبة لمحور السينات . وبالمثل فهو متماثل بالنسبة لمحور الصادات .

(٢) إن $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$. يقطع المنحنى محور الصادات عندما $x=0$ أي أن $y=\pm b$. فيوجد نقطتا تقاطع هما $B_1(0,b)$ ، $B_2(0,-b)$. واضح أن $\overline{F_1B_1}=\overline{F_2B_1}$. ومن المثلث القائم B_1F_1O نجد أن $a^2=b^2+c^2$ (انظر شكل (١٩)).

$\frac{b^2}{a^2}x^2=b^2-y^2$

ولكي تكون x حقيقية فإن: $b^2-y^2\geq 0 \Rightarrow y^2\leq b^2 \Rightarrow |y|\leq b \Rightarrow -b\leq y\leq b$

أي أن النقطتين $(b-,0)$ ، $(0,b)$ هما أعلى وأدنى نقطتين من القطع على المحور الصادي.

(٣) وبالمثل يقطع المنحنى محور السينات عندما $y=0$ فنجد أن $x=\pm a$. فيوجد نقطتا تقاطع هما $V_2(-a,0)$ ، $V_1(a,0)$ ويقع القطع بكامله بين هاتين النقطتين (شكل (١٩))

(٤) المسافة $\overline{V_1V_2}=2a$ ، والمسافة $\overline{B_1B_2}=2b$. وواضح أن $\overline{V_1V_2}>\overline{B_1B_2}$.

فالمستقيم $\overline{V_1V_2}$ يسمى المحور الأكبر "major axis" (أو المحور البؤري) لمروره بالبؤرتين والمستقيم $\overline{B_1B_2}$ يسمى المحور الأصغر "minor axis" وتسمى نقطة تقاطع المحورين (وهي نقطة الأصل في هذه الحالة) مركز القطع الناقص .

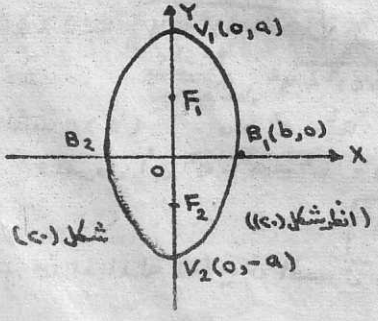
(٥) إذا انطبقت F_1,F_2 على مركز القطع فإننا نحصل على الدائرة $x^2+y^2=a^2$.

ولذلك نعتبر الدائرة حالة خاصة من القطع الناقص فهي قطع ناقص متساوي المحورين

(٦) يعرف وتر القطع الناقص المار بإحدى البؤرتين والعمودي على محوره الأكبر بوتره البؤري العمودي وطوله يساوي $\frac{2b^2}{a}$.

ملحوظة:

المعادلة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هي معادلة قطع ناقص مركزه مبدأ الإحداثيات ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات (انظر شكل (١٩)).



شكل (٢٠)

أما إذا كانت البؤرتان $F_1(0,c),F_2(-c,0)$ (انظر شكل (٢٠))

فيكون المحور الأكبر منطبقا على محور الصادات وتصبح معادلة القطع الناقص:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \ldots (3)$$

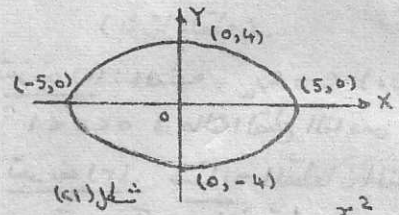
مثال (١): أوجد معادلة القطع الناقص الذى طولا محوريه 8,10 وحدات ومركزه (٠,٠) وعين بؤرتيه من كل من الحالتين الآتيتين :

أ - إذا كان محوره الأكبر منطبقا على محور السينات .

ب - " " " " " الصادات .

الحل: أ - إذا كان المحور الأكبر ينطبق على المحور السينى ومركز القطع نقطة الأصل فإن معادلة الناقص هى:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



شكل (٢١)

$$\therefore 2a = 10 \Leftrightarrow a = 5 ;$$

$$2b = 8 \Leftrightarrow b = 4 .$$

وتصبح معادلة القطع الناقص هى :

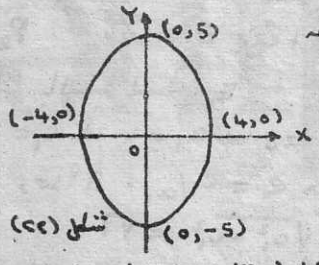
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$$

وتكون :

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 \Rightarrow c = 3$$

البؤرتان : $F_1(3,0)$ ، $F_2(-3,0)$

ب - إذا كان المحور الأكبر ينطبق على المحور الصادى ومركز القطع نقطه الأصل فإن معادلة القطع الناقص تصبح : أى أنه $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$



شكل (٢٢)

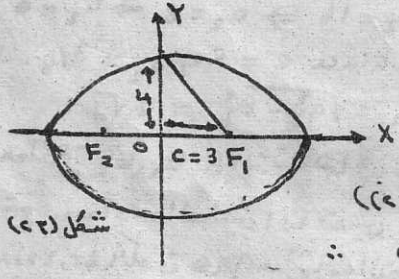
$$\frac{x^2}{16} + y^2/25 = 1 \Leftrightarrow 25x^2 + 16y^2 = 400$$

والبؤرتان $F_1(0,3)$ ، $F_2(0,-3)$

مثال (٢): أوجد معادلة القطع الناقص الذى طول محوره الأصغر 8 وحدات والبعد بين بؤرتيه 6 وحدات والبؤرتان على المحور السينى ومركزه نقطة الأصل .

الحل : المعادلة القياسية للقطع الناقص هى :

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$



شكل (٢٣)

$$2b = 8 \Leftrightarrow b = 4$$

$$OF_1 = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{(من الشكل (٢٣))}$$

$$\therefore a^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow a = 5$$

∴ معادلة القطع الناقص هى :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$$

مثال (٣): عين البؤرتين وطولى المحورين للقطع الناقص $9x^2+25y^2=225$

الحل:

$$9x^2+25y^2=225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

فهى معادلة قطع ناقص مركزه مبدأ الإحداثيات ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات:

$$a^2=25 \Rightarrow a=5 \; ; \; b^2=9 \Rightarrow b=3$$

∴ طول محور الأكبر: $2a=10$ ، طول محوره الأصغر: $2b=6$.

$$c^2=a^2-b^2=25-9=16 \Rightarrow c=4 \Rightarrow$$

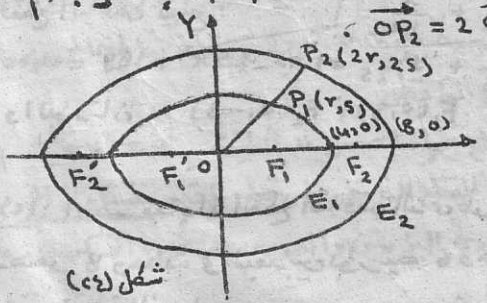
بؤرتا القطع: $F_1(4,0)$ & $F_2(-4,0)$.

(2) تعريف (٥): النسبة $e=c/a$ (دون بعد) والمسماه بالاختلاف المركزى للقطع. فهى $0<e<1$ فى حالة القطع الناقص. كما أنها تقيس مدى إستدائيه القطع الناقص.

(3) تعريف (٦): يتشابه القطعان الناقصان إذا كان لهما نفس الإختلاف المركزى وتكون الكميات الثابته a, b & c متناسبة فى هذه الحالة.

V.Imp

مثال (٤): لتكن E_1, E_2 قطعين ناقصين لهما نفس الإختلاف المركزى $\frac{3}{4}$، نفس المركز، ولمحور الأكبر 8, 16 وحدات منطبقه على المحور السينى، على الترتيب. أوجد معادلة كل من E_1, E_2 ثم إرسمها بالنسبه لمحاور كارتيزيه واحدة. ثم إثبت إنه إذا كانت $P_1 \in E_1$ فإنه توجد النقطه P_2 من E_2 بحيث أن $\overrightarrow{OP_2}=2\overrightarrow{OP_1}$.



شكل (٢٤)

الحل: بالنسبه للقطع E_1:

$$2a_1=8 \Rightarrow a_1=4 \Rightarrow c_1=3,$$

since $e=c_1/a_1$. Also,

$$b_1=\sqrt{a_1^2-c_1^2}=\sqrt{7}.$$

بالنسبه للقطع E_2:

$$2a_2=16 \Rightarrow a_2=8 \Rightarrow c_2=6,$$

since $e=c_2/a_2=3/4$. Also

$$b_2=\sqrt{a_2^2-c_2^2}=2\sqrt{7}.$$

∴ معادلتا E_1, E_2 على الترتيب هما: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$; $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$

نستنتج من معادلتى القطعين الناقصين أنه إذا كانت (r,s) إحداثيات النقطه $P_1 \in E_1$ فإن (2r,2s) تكون هى إحداثيات النقطه $P_2 \in E_2$ وبالتالى نجد أن

$$\overrightarrow{OP_2}=2r\underline{i}+2s\underline{j}=2(r\underline{i}+s\underline{j})=2\overrightarrow{OP_1}.$$

Look

(انظر الشكل (٢٤)).

from ① $\Rightarrow b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2 \Rightarrow y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{a^2b^2}{a^2y_1}$

$\Rightarrow y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2}{y_1} \Rightarrow$ $c=\frac{b^2}{y_1}$; $m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

$\Rightarrow m=-\frac{b^2x_1}{a^2b^2}\frac{a^2y_1}{c}=-\frac{x_1}{a^2}c=m$ $\Rightarrow$ $x_1=-\frac{ma^2}{c}$ $y_1=\frac{b^2}{c}$

$\Rightarrow$ from(1)* $c=\frac{b^2}{c}+\frac{m^2a^2}{c} \Rightarrow$ $c^2=m^2a^2+b^2$

since $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow 2b^2x + 2a^2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$ (I)

$\Rightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \Rightarrow a^2y_1y - a^2y_1^2 = -b^2xx_1 + b^2x_1^2$

$\Rightarrow b^2x_1x + a^2y_1y = b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$ $\times \frac{1}{a^2b^2}$ $\Rightarrow \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ ①

tangent equation

& perpendicular's slope $= \frac{a^2y}{b^2x}$ i.e. from (I)

$\Rightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ ②

perpendicular's equation

(4) بند (د؟) : معادلة المماس للقطع الناقص والعمودى عليه عند النقطة $P_1(x_1,y_1)$:

لتكن معادلة القطع الناقص هى $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ فإن معادلتى

المماس والعمودى عند النقطة P_1 الموجودة على القطع هما على الترتيب

$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ ① $\quad \frac{y-y_1}{y_1a^2} = \frac{x-x_1}{b^2x_1}$ ②

(5) بند (د ب) : إثبت أنه يمكن رسم مماسين للقطع الناقص من نقطة خارجه :

Now let (y_1) any point on the ellipse and (y_1) the outer point P_1

نفرض أن $P_1(x_1,y_1)$ نقطة خارج القطع الناقص $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

فإذا مر المستقيم $y = mx + c$ بالنقطة P_1 فإن : $c = y_1 - mx_1$ ... (1)

ولكن إذا مس المستقيم القاطع فإن : $c^2 = a^2m^2 + b^2$ ... (2)

إذن من (2)، (1) نجد أن : $m^2(x_1^2 - a^2) - 2x_1y_1m + y_1^2 - b^2 = 0$ ... (3)

Solve

put $c^2 = (y_1 - mx_1)^2$ in (2)

المعادلة (3) من الدرجة الثانية فى "m" وهذا مايثبت أنه يمكن رسم مماسين من نقطة خارج القطع الناقص مع ملاحظة أنه فى حالة قيمتى m الحقيقيتين أى بمعنى فى حالة أن يكون جذرا المعادلة (3) حقيقيين .

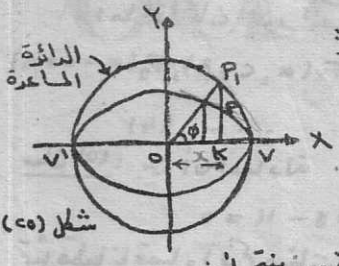
(6) بند (د ح) : المعادلات البارامترية للقطع الناقص :

نرسم الدائرة الساعدة كما بالشكل (د٥) وذلك

على المحور الأكبر كقطر فيها . فإذا أمددنا العمودى KP

على المحور الأكبر ليقابل الدائرة فى النقطة P_1 فإن

$\overline{KP_1}^2 = \overline{KV} \times \overline{KV'}$ ... (1)



شكل (د٥)

ولكن من الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص ينتج أن

$\overline{KP}^2 = y^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$

أى أن $\overline{KP}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a-x)(a+x) = \frac{b^2}{a^2}(\overline{VK} \times \overline{V'K})$ ... (2)

إذن من (2)، (1) ينتج أن $\overline{KP}/\overline{KP_1} = b/a$ ولكن

$\overline{OK} = \overline{OP_1}\cos\phi = a\cos\phi \Rightarrow \boxed{x = a\cos\phi}$ ... (3)

$\overline{K,P} = \frac{b}{a} \times \overline{P_1K} = \frac{b}{a} \times \overline{OP_1}\sin\phi = b\sin\phi \Rightarrow \boxed{y = b\sin\phi}$ ... (4)

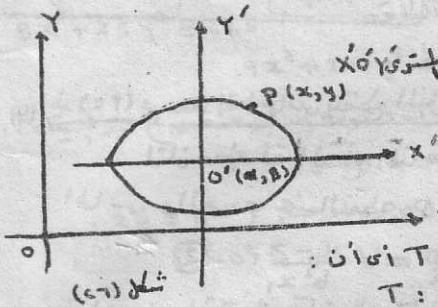
تعرف المعادلتين (4)، (3) بالمعادلات البارامترية للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

كما نعرف "الزاوية ϕ" بزاوية إختلاف المركزى للنقطة P "

(7) بند (د ى) : معادلة القطع الناقص منسوبة إلى محورين يوازيان محورى الإحداثيات :

معادلة القطع الناقص الذى مركزه نقطة الأصل وينطبق محوره الأكبر على محور السينات هى

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ... (1)



شكل (٢٦)

ونفرض أن T انتقال للمستوى XOY إلى المستوى X'O'Y'

معرفة بالقاعدة $T:(0,0)\to(\alpha,\beta)$

إذن يصبح مركز القطع الناقص هو (α,β)

بالانتقال T . ونفرض أن النقطة $P(x,y)$ هي صورة النقطة $P'(x',y')$ بواسطة T أي أن:

$$T:(x',y')\longrightarrow(x,y)$$

وكما رأينا من حالة القطع المكافئ نجد أن: ... (2) $x'=x-\alpha\ ;\ y'=y-\beta$

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على المعادلة

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \quad \ldots (3)$$

وهي معادلة القطع الناقص مركزه $O'(\alpha,\beta)$ والمحاور XOY وله الصفات التالية:

(i) يقع محوره الأكبر على المستقيم $x=\alpha$ ، ومحوره الأصغر على المستقيم $y=\beta$

(ii) بؤرتا القطع هما النقطتان $F_1(c+\alpha,\beta)$, $F_2(-c+\alpha,\beta)$ وتقعان على المحور الموازي للمحور السيني في هذه الحالة وهو المحور الأكبر وطوله يساوي $2a$.

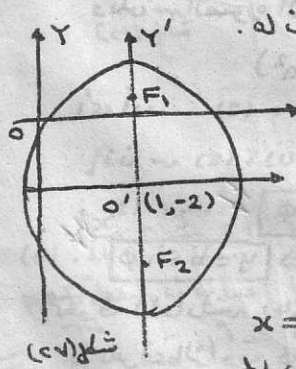
أما إذا كان المحور الأكبر يوازي المحور الصادي فإن بؤرتيه تكونان: $F_1(\alpha,c+\beta)$, $F_2(\alpha,-c+\beta)$ وتكون المعادلة القياسية للقطع الناقص:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}+\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1 \quad \ldots (4)$$

مثال (5): بين أن المعادلة

$$9x^2-18x+4y^2+16y-11=0$$

تمثل قطعا ناقصا واذكر صفات هذا القطع وارسم المنحنى البياني له.



شكل (٢٧)

الحل: نكمل المربع لكل من x,y :

$$9(x^2-2x)+4(y^2+4y)=11 \iff$$

$$9(x-1)^2+4(y+2)^2=9+16+11=36 \iff$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

وهي تمثل قطعا ناقصا مركزه $O'(1,-2)$ ، معادلتا محوريه هما

$x=1$, $y=-2$. $a=3, b=2 \Rightarrow c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$.

طول المحور الأكبر يساوي 6 ، وطول المحور الأصغر يساوي 4 ، المحور الأكبر يوازي المحور الصادي وتكون بؤرتا القطع هما:

$F_1(1,\sqrt{5}-2)$ & $F_2(1,-\sqrt{5}-2)$.

(1) for example as a value this value becomes zero when $x=\alpha$

this means when (β) at the upper point of the minor axis of the ellips

تمارين (٢):

(١) فى كل من التمارين الآتيه ضع المعادلة فى صورة قياسيه واستنتج صفات القطع الناقص وارسم المنحنى فى كل حالة:

(i) $9x^2 + 4y^2 = 36$. ; (ii) $4x^2 + 9y^2 = 144$.

(iii) $16x^2 + 9y^2 - 72x + 54y = 135$.

(iv) $x^2 + 2y^2 - 2x + 12y - 7 = 0$.

(v) $9x^2 - 36x + 4(y+7)^2 = 0$.

(٢) أوجد البعد المركزى واحداثيات البؤرتين لكل من القطاعات الناقصه الآتيه

(i) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$; (ii) $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 8 = 0$.

(iii) $2x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$; (iv) $4x^2 + y^2 - 2y + 3 = 0$.

(v) $x^2 + 4y^2 - 8y = 0$; (vi) $x^2 + 2y^2 - 2y - 4x + 1 = 0$

(٣) أوجد معادلة القطع الناقص الذى مركزه (2,2) واحدى بؤرتيه النقطة (-1,2) وطول محوره الأكبر يساوى $2\sqrt{15}$ وحدة ثم أرسمه

(٤) أوجد معادلة القطع الناقص الذى نهايتا محوره الأصغر (-7,2), (1,2) والبعد بين بؤرتيه 6 وحدات .

(٥) أوجد معادلة القطع الناقص الذى مركزه (-3,3) ومحوره الأكبر يوازى المحور السينى وطوله 20 وحدة وطول المحور الأصغر 16 وحدة . ارسم القطع .

(٦) أوجد معادلة القطع الناقص الذى بؤرتاه (-4,5), (2,5) وطول محوره الأصغر 8 وحدات . ارسم هذا القطع .

(٧) أوجد إحداثيات البؤرتين ومعادلتى الدليليه لكل من القطاعات الناقصه الآتيه:

(i) $2x^2 + 3y^2 = 6$; (ii) $9x^2 + 25y^2 = 225$

(iii) $9x^2 + 6y^2 = 54$.

(٨) أوجد معادلة القطع الناقص الذى بؤرته النقطة (1,2) ، احدى بؤرتيه . واحدى دليليه المستقيم $3x+4y+5=0$ واختلافه المركزى يساوى $\frac{1}{2}$ ، ثم أوجد كذلك إحداثيات مركزه .

(٩) أوجد القطب والخط القطبى ووتر التماس للقطع الناقص :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

بند (٣): القطع الزائد :

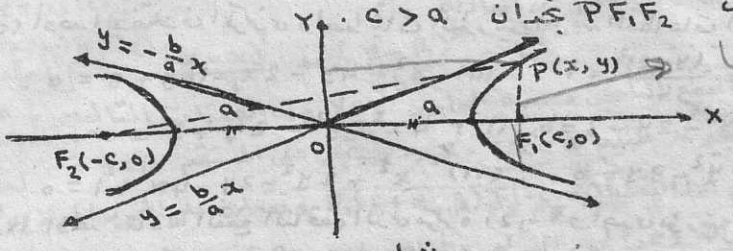
تعريف : (١)

إذا كانت F_1, F_2 نقطتين ثابتتين فى مستوٍ مفروض E^2. فإن مجموعة النقط P فى هذا المستوى والتى تحقق الشرط الآتى : $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}|$ = دائماً مقدار ثابت .

تسمى قطعاً زائداً ، وتسمى F_1, F_2 بؤرتى القطع الزائد .

نفرض أن المقدار الثابت $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}|$ يساوى $2a$ وأن المسافة بين البؤرتين F_1, F_2 يساوى $2c$ (وتسمى البعد البؤرى) حيث c, a أعداد حقيقية موجبة.

ومن المثلث PF_1F_2 نجد أن $c > a$.



شكل (٢٨)

Latus-rectum $= \frac{b^2}{a}$

$OF_1 = c$

بند (٣٢): الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد : (٢)

نفرض أن المستوى E^2 هو مستوى الإحداثيات المتعامدة وأن $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ بؤرتى القطع الزائد وأن النقطة $P(x,y)$ واقعة على القطع ، وأن الفرق الثابت يساوى $2a$ ، أى أن :

$$|\overline{PF_1} - PF_2| = 2a \Rightarrow \left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a .$$

وبالتربيع والاختصار ثم التربيع كما فعلنا فى القطع الناقص نحصل على :

$$x^2/a^2 + y^2/(a^2-c^2) = 1$$

ولكن $c > a$ فإن $c^2 - a^2 > 0$. ونفرض أن $b^2 = c^2 - a^2$ فنحصل على المعادلة:

$$\boxed{x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1} \quad \ldots (1)$$

وهى الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد .

ويمكن الحصول على النتائج التالية من المعادلة (١) :

(١) واضح أن لكل قيمة تأخذها y يوجد قيمتان للمتغير x هما $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$

وهذا يدل على أن منحنى القطع الزائد متماثل بالنسبة لمحور الصادات كما بالشكل (٢٨) .

(٢) $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ معادلة (١) . تكون لا حقيقية إذا كان :

$a \le x \le -a$

$x^2 \ge a^2 \iff |x| \ge a \iff x \ge a$ or $x \le -a$

أى أن $x \notin]-a, a[$. وكل قيمة تأخذها x فى الفترة $]-\infty, -a] \cup [a, \infty[$ تعين قيمتين للمتغير y متساويتين فى المقدار ومختلفتين فى الإشارة مما يدل على أن القطع الزائد متماثل بالنسبة للمحور السينى. وتسمى نقطة الأصل مركز القطع الزائد .

(٣) بوضع $y = 0$ فى المعادلة (١) نحصل على $x = \pm a$ ، أى أن النقطتين $(a,0), (-a,0)$ هما نقطتا تقاطع القطع الزائد مع المحور السينى والمستقيم الواصل بينهما يسمى المحور القاطع للقطع الزائد (أو المحور البؤرى) والبعد بينهما يساوى $2a$.

(٤) بوضع $x = 0$ فى المعادلة (١) نجد أن $y^2 = -b^2$ وهى معادلة مستحيلة الحل فى المجال الحقيقى . فالمحور الصادى هو محور غير قاطع للقطع الزائد فى هذه الحالة .

(٥) المعادلة القياسية للقطع الزائد الذى مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع هو المحور الصادى:

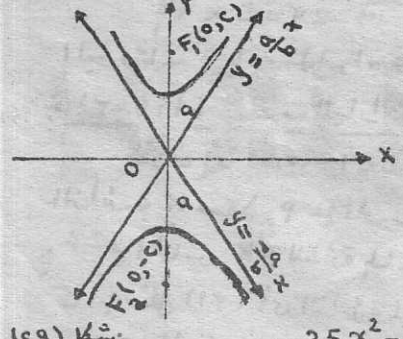
إن المعادلة: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ... (١)

هى معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع هو المحور السينى حيث البؤرتان : $F_1(c,0)$ & $F_2(-c,0)$.

أما إذا كانت بؤرتا القطع الزائد هما $F_1(0,c)$ & $F_2(0,-c)$ كما فى الشكل (٢٩) فإن معادلة القطع الزائد تأخذ الصورة :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \ldots (2)$$

وهى معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومحورة القاطع (البؤرى) هو المحور الصادى .



شكل (٢٩)

الخطان التقاربيان للقطع الزائد :

فى الشكل (٢٨) يسمى الخطان

$y = \frac{b}{a}x$ ، $y = -\frac{b}{a}x$

خطان تقاربيان للقطع الزائد (١) .

وفى الشكل (٢٩) يسمى الخطان

$y = \frac{a}{b}x$ ، $y = -\frac{a}{b}x$

خطان تقاربيان للقطع الزائد (٢) .

مثال (١١) : عين بؤرتى القطع الزائد $25x^2 - 4y^2 = 100$.

الحل :

$25x^2 - 4y^2 = 100 \iff \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$

ويلاحظ أن المحور القاطع للقطع الزائد ينطبق على المحور السينى .

center, expression of the axes, the asymptotes, foci, intercepts with axes
(1) (2) (3) (4) (5)

$a^2=4,\ b^2=25 \Rightarrow a=2,\ b=5$;

$c^2 = a^2+b^2 \Rightarrow c^2 = 4+25 = 29 \Rightarrow c=\sqrt{29}$.

بؤرتا القطع هما : $(\sqrt{29},0)$ & $(-\sqrt{29},0)$

(4) بند (٣-د): معادلة القطع الزائد عندما يكون محوراه يوازيان محوراه :

نفرض أن مركز القطع الزائد هو (α,β). بطريقة مماثلة لما سردناه فى القطع الناقص يمكن اثبات أن معادلة القطع الزائد الذى محوره القاطع يوازى محور السينات هى :

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1} \quad \ldots (3)$$

ومعادلة القطع الزائد الذى مركزه أيضا (α,β) ولكن محوره القاطع يوازى محور الصادات هى :

$$\boxed{\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1} \quad \ldots (4)$$

ordinate
double

مثال (٤): بين أن المعادلة $x^2-4y^2+2x+8y-7=0$ تمثل معادلة قطع زائد ثم اذكر صفاته وارسم المنحنى البيانى له .

الحل :

$$(x^2+2x)-4(y^2-2y)=7 \Leftrightarrow (x+1)^2-4(y-1)^2=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

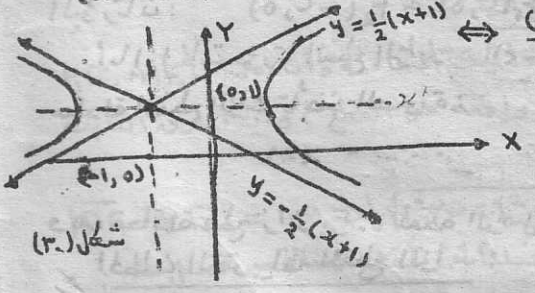
وهى معادلة قطع زائد مركزه $(-1,1)$

محوراه هما : $x=-1$, $y=1$

الخطوط التقريبية له هى :

$$y-1 = \pm\frac{1}{2}(x+1)$$

$$\Rightarrow 2y = \pm x + 3$$



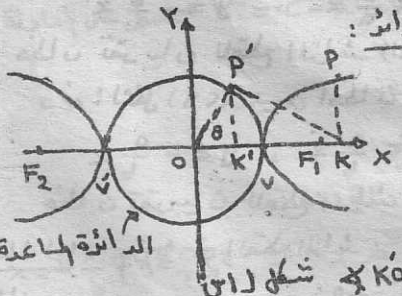
شكل (٣٠)

البؤرتان هما $F_1(\sqrt{5}-1,1)$; $F_2(-\sqrt{5}-1,1)$

(5) بند (٣-هـ): المعادلات البارامترية للقطع الزائد :

نفرض أن $P(x,y)$ أى نقطة على القطع الزائد ، K مسقط P على المحور القاطع .

نرسم المماس $P'K$ للدائرة المساعدة كما بالشكل (٣١) أى الدائرة المرسومة على $\overline{V'V}$ كقطر فيها . نصل OP' ونفرض أن $\angle K'OP' = \theta$



شكل (٣١)

(أ) $\therefore \sec\theta = K'O/OP' = \frac{x}{a} \Rightarrow \boxed{x = a\sec\theta}$

$\frac{y^2}{b^2} = \sec^2\theta - 1 = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$y^2 = b^2\tan^2\theta \Rightarrow \boxed{y = b\tan\theta}$

بالمثل نجد أن (ii) . . . $y = b \tan\theta$

تعرف العلاقتين (i)، (ii) بالصورة البارامتريه للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

كما توجد صورة بارامتريه أخرى لمثل هذا القطع وهى :

$$x = a\cosh\theta \quad \& \quad y = b\sinh\theta$$

بند (٣ د) : بعض قوانين القطع الزائد المستنبطه من قوانين القطع الناقص :

(i) بما أن معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{-b^2} = 1$$

فإنه يمكن الحصول على كثير من النتائج للقطع الزائد من النتائج المناظره للقطع الناقص وذلك بوضع "$-b^2$" بدلا من b^2 كما يلى :

(i) معادلة المماس عند النقطه P_1 للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$x_1 x/a^2 - y_1 y/b^2 = 1$$

(ii) معادلة العمودى :

$$(x - x_1)/(x_1/a^2) = (y - y_1)/(-y_1/b^2)$$

(iii) يمس المستقيم $y = mx + c$ القطع الزائد إذا تحقق الشرط :

$$c = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

(iv) معادلة الخط القطبى للنقطه P_1 بالنسبه للقطع الزائد هى

$$x_1 x/a^2 - y_1 y/b^2 = 1$$

(v) المحل الهندسى لمنتصفات مجموعة من الأوتار المتوازيه التى ميلها m للقطع الزائد هو المستقيم

$$y = \frac{b^2}{ma^2}x$$

ويكون حاصل ضرب ميلى القطرين المترافقين يساوى $\frac{b^2}{a^2}$.

بند (٣ هـ) : المماسان التقاربيان للقطع الزائد :

تعريف : الخط التقاربى هو المستقيم الذى يمس المنحنى فى مالا نهايه أى يقطع المنحنى فى نقطتين منطبقتين فى مالا نهايه .

بفرض أن $\tan\frac{\theta}{2} = t$ فإنه يمكننا تمثيل أى نقطة على القطع الزائد بدلالة البارامتر "t" كالآتى :

$$x = a\sec\theta = a/\cos\theta = \frac{a(\cos^2\theta/2 + \sin^2\theta/2)}{(\cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2)}$$

$$= a(1+t^2)/(1-t^2)$$

بالمثل نجد أن

$$y = b\tan\theta = 2bt/(1-t^2)$$

أى أن $x = a\frac{1+t^2}{1-t^2}$ & $y = 2b\frac{t}{1-t^2}$

ويعرف هذا التمثيل البارامترى الجرى للقطع الزائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

معادلة المماس عند النقطة $(a\frac{1+t^2}{1-t^2}, 2b\frac{t}{1-t^2})$ للقطع الزائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ هى

$$(t^2+1)\frac{x}{a} - 2t\frac{y}{b} + (t^2-1) = 0 \quad (1) \quad (t \neq \pm 1)$$

فإذا قربت t إلى 1 فإن المستقيم يمس المخنى فى الدرجة الأولى لذلك نقطة التماس فى هذه الحالة تقع فى اللانهاية وتؤول معادلة المماس إلى: $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}x$

ونظرا لذلك هذا المستقيم يمس المخنى فى اللانهاية لذلك فهو خط تقارب للقطع الزائد.

كذلك فى حالة $t \to -1$ فإن المستقيم يمس المخنى فى اللانهاية وتؤول معادلة المماس إلى $y = -\frac{b}{a}x \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$. ويكون هذا خط تقارب ثانى للقطع الزائد.

ويلاحظ أن المعادلة المشتركة للخطين التقاربين هى $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

وهى تختلف عن معادلة القطع الزائد فقط فى الحد الثابت وهذه النتيجة تظل صحيحة فى حالة نقل المحاور

(٤) (٣ و): القطع الزائد القائم:

تعريف: إذا تعامد الخطان التقاربان لقطع زائد سمى قطعا زائدا قائما

الخطان التقاربان للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هما $y = \pm\frac{b}{a}x$. شرط تعامدهما هو:

$$\frac{b}{a}\times -\frac{b}{a} = -1 \Rightarrow a = b$$

وتبعا لذلك فإن معادلة القطع الزائد القائم هى $\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$.

ويعرف هذا فى بعض الأحيان بالقطع الزائد المتساوى الأضلاع نسبة لتساوى طولى محوريه.

ونظرا لأن $a = b$ فى القطع الزائد القائم فإن معادلة الخطين التقاربين هما $y = \pm x$

ويصنع كل منهما زاويه $\pm\pi/4$ مع المحور القاطع.

مثال (٢): أوجد معادلة القطع الزائد الذى خطاه التقاربان هما

$x + 2y + 3 = 0$ & $3x + 4y + 5 = 0$ ويمر بالنقطة $(1,-1)$

الحل: نعلم أن معادلة القطع الزائد تختلف عن معادلة الخطين التقاربين فقط فى الحد الثابت. ولكن معادلة الخطين التقاربين هى

$$(x+2y+3)(3x+4y+5) = 0 \Leftrightarrow 3x^2+10xy+8y^2+14x+22y+15 = 0$$

إذن معادلة القطع الزائد هى

$$3x^2+10xy+8y^2+14x+22y+d = 0$$

وكان القطع الزائد المطلوب معادلته يمر بالنقطه (1-,1) . عوض بتلك النقطه فى المعادلة الاخيرة فنحصل على قيمه d وهى $d = 7$

∴ معادلة القطع الزائد المطلوبه هى : $3x^2 + 10xy + 8y^2 + 14x + 22y + 7 = 0$

مثال (٤): أوجد المركز والمحورين والبعد المركزى وطول الوتر البؤرى العمودى للقطع الزائد الذى معادلته : $9x^2 - 16y^2 - 90x + 64y + 17 = 0$

الحل :

$$9(x^2 - 10x) - 16(y^2 - 4y) = -17 \iff 9(x-5)^2 - 16(y-2)^2 = 144 \iff \frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

أى أن مركز هذا القطع هى النقطه (5,2) . وطول المحور القاطع $2a = 2\times 4 = 8$

وطول المحور المرافق : $2b = 2\times 3 = 6$ ، إختلافه المركزى : $e = c/a = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = 5/4$

وطول وتره البؤرى العمودى : $2b^2/a = 2\times\frac{9}{4} = \frac{9}{2}$

ملحوظه هامة :

المعادلة العامة من الدرجة الثانيه فى (x,y) تكون على الصورة

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0 \quad \text{(انظر الباب الثانى)} \quad \cdots (1)$$

وبدوران المحاور حول نقطه الأصل خلال زاويه مناسبة فإن المعادلة (1) يمكن كتابتها على الصورة

$$a'x^2 + b'y^2 + kx + ly + c' = 0 \quad \cdots (2)$$

وباكمال المربع على x,y يمكن وضع المعادلة (2) فى إحدى الصور القياسيه السابقه وفى هذه الحالة يحدد المعاملان a', b' نوع المخنى الذى يمثله (2) فهو :

(١) قطع مكافئ إذا كان $a'\cdot b' = 0$. أما إذا كان $a' = b' = 0$ فالمخنى خط مستقيم

(٢) قطع ناقص إذا كان $a'\cdot b' > 0$. أما إذا كان $a' = b' \neq 0$ فالمخنى دائرة

(٣) قطع زائد " " $a'\cdot b' < 0$. وفى بعض الحالات الخاصة مثل $x^2 - y^2 = 0$ يتحول المخنى إلى مستقيمين متقاطعين .

تمارين (٢) :

(١) ارسم كل من القطاعات الزائدة الآتية

(i) $16x^2 - 9y^2 = 144$ ؛ (ii) $-16x^2 + 5y^2 = 80$ ؛

(iii) $y^2 - 4x^2 + 4y + 8 = 0$ ؛ (iv) $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y + 31 = 0$

(٢) أوجد معادلة القطع الزائد الذى بؤرتاه (5,0) , (-5,0) وطول محور القاطع يساوى 8 وحدات .

(٣) ضع كلا من المعادلات الآتيه فى الصورة القياسيه ثم إرسم المنحنى الممثل لها بيانيا

(i) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$; (ii) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$

(iii) $x^2+6x-16y-7=0$; (iv) $x^2+y^2+10x-6y+18=0$

(v) $4x^2-16x+y^2-5y+2=0$; (vi) $x^2+2y+8x+10=0$

(vii) $x^2+y^2=x+y$; (viii) $x^2+4x=y^2+2y-5$

(ix) $4x^2-5y^2-16x+10y-29=0$; (x) $3x^2-4y^2-6x-8y-4=0$

(٤) أوجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه $(2,2)$ ويمر بالنقطتين

(i) $(2\pm3, 2)$; (ii) $(2, 2\pm3)$

(٥) اوجد المعادلتيه مع رسم منحنى كل منهما

(i) $4x^2+y^2-8x+4y+4=0$

(ii) $4x^2-y^2-8x-4y-4=0$

(٦) حدد نوع القطع المخروطى الذى يمثله كل من المعادلتين

(i) $3x^2+2y^2-12x+8y+9=0$

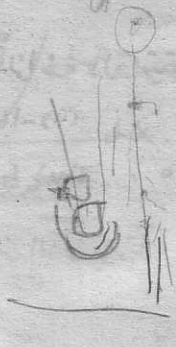
(ii) $25x^2-9y^2+50x+90y+25=0$

(٧) أوجد معادلة الخط المماس للقطع الزائد $(6,2)$ بالنسبة للقطع

$$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+4)^2}{9}=1$$

(٨) أوجد معادلتى المماسين المرسومين من النقطه $P(2a, 3b)$ للقطع الزائد

$$x^2/a^2-y^2/b^2=1$$



when we multiply the dividing number by a digit

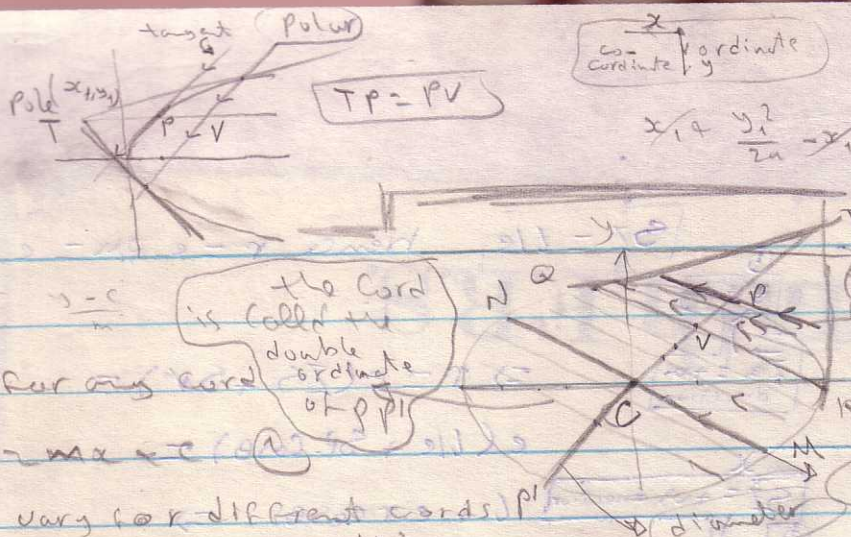
1) why we start arranging this number from left to right the numbe is meant by it (the result of division)
2) why we start arranging the result of multiplication from left to right.
3) why substraction is done.
4) on what basis the following digit in the divided number is decended at the end right of the remainder of substraction.
5) when the dividing > the divided, why we put the decimall point, then we put zero in fron of the divided.

---

1) we want by division to know the number of multiples the dividing consistes of the divided number.
2) Since it is hard to know the lower order of the result of division, we start with the higher order digit of division, and the resulting number from multiplication must be equal to the highest order of decimail places. So the product of
3) multiplication is arranged from left to right
3) substraction is done because we want to know the rest of multiples the divided consistes of the divding number.
4) the following digit is of lower order than the first one, and the same process is done again.

5) the same thing holds when we want to know the fraction of multiples the divided number consistes of the dividing number.

6) Notice that the repitition of putting a zero after the remainder of substraction means the reduction (or decrease) of ~~the~~ order of the chosen digit from the preceeding digit.



$x_1 + \frac{y_1^2}{2a} - x_1$

Comy for any cord $y = mx + c$ ①

$\Rightarrow$ (c) may vary for different cords

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ② eval (y) (P) - (a) ②

Since the roots of the resulting equ. from ① Since $K = mhc$ the wanted locus

$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-a^2 mc}{a^2 m^2 + b^2}$ eliminating (c), $\Rightarrow$ $b^2 h = -a^2 mK \Rightarrow y = -\frac{b^2}{a^2 m} x$

this line its slope $= m_1 = -\frac{b^2}{a^2 m}$

$m_1 \times m = -\frac{b^2}{a^2}$ this means the Dia PP' bisects all Cords parallel to Dia MN; if $m_1 m = -\frac{b^2}{a^2}$

and this means that Dia MN also bisect all Cords // to Dia PP'

$\Rightarrow$ MN and PP' are called Conjugate Diameters

** The tangent at the extremity of any Dia is // to the Cords which it bisects

*** The tangents at the ends of any Chord on the Dia which bisects the chord

** 4 normal can be drawn from any Point to an ellipse, and that the sum of the eccentric angles of their feet is equal to a odd multiple of right angles, } For $ax^2 + bx + c = 0$; its roots are α, β

$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$; $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

3) $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$; $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$CB = CB' = b$

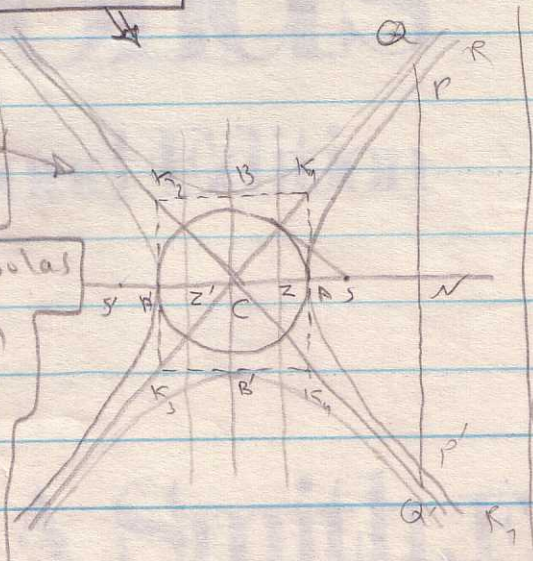
1. To Construct the asymptotes

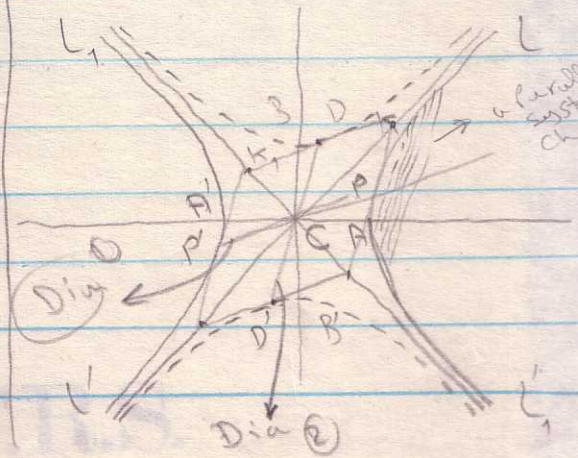
Conjugate hyperbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

and

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

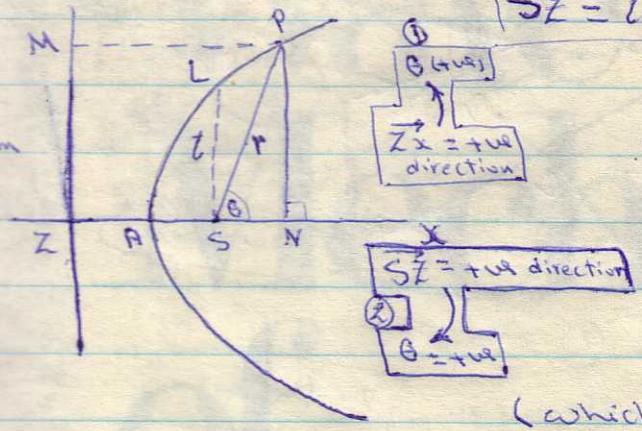




(1), (2) conjugate Diameters

-335-

l = Semi-Latus rectum



$SZ = l/e$ Hence $r = e.PM = e.ZN$

$\Rightarrow r = e(ZS + SN) =$

$e(l/e + SP.\cos\theta) =$

$l + e.r\cos\theta \Rightarrow$

$$r = \frac{l}{1 - e\cos\theta} \quad ①$$

(which is the general equation for conics.)

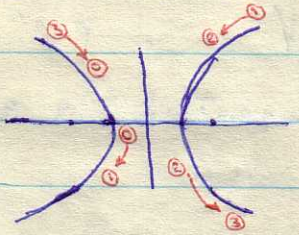
For ② $r = \dfrac{l}{1 + e\cdot\cos\theta}$ ②

If the initial line, instead of being the axis, be such that the axis is inclined at an angle (γ) to it, then in -335-, instead of θ we must substitute $l/r = 1 - e.\cos(\theta - \gamma)$.

-I- in the case of a parabola ($e = 1$). [try for different $0 \le \theta \le 2\pi$]

-II- " " " " an ellipse ($e < 1$).

-III- " " " " a hyperbola ($e > 1$).



$a_1 a_2 = a$; $b_1 b_2 = b$; $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2h$

$$a x^2 + 2h xy + b y^2 = 0 \quad =$$

$a_1 x + b_1 y = 0$ and $a_2 x + b_2 y = 0$

$$\frac{a_1 x + b_1 y}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Rightarrow \boxed{a' x^2 + 2h' xy + b' y^2 = 0}$$

$$(a_1 B - a_2 A) x + (b_1 B - b_2 A) y = 0$$
$$(a_1 B + a_2 A) x + (b_1 B + b_2 A) y = 0$$

$(a_1 B - a_2 A)(a_1 B + a_2 A) = a'$ $\quad \{ a' x^2 + 2h' xy + b' y^2 = 0 \}$

$(b_1 B - b_2 A)(b_1 B + b_2 A) = b'$

$(a_1 B + a_2 A)(b_1 B - b_2 A) + (a_1 B - a_2 A)(b_1 B + b_2 A) = 2h'$

$a_1^2 (a_2^2 + b_2^2) - a_2^2 (a_1^2 + b_1^2) = a_1^2 b_2^2 - a_2^2 b_2^2 = a'$ [1]

$b_1^2 (a_2^2 + b_2^2) - b_2^2 (a_1^2 + b_1^2) = b_1^2 a_2^2 - b_2^2 a_1^2 = b'$ [2]

$2 a_1 b_1 (a_2^2 + b_2^2) - 2 a_2 b_2 (a_1^2 + b_1^2) + a_2 b_1 (AB) - a_1 b_2 (AB)$

$+ a_1 b_1 (a_2^2 + b_2^2) - a_2 b_2 (a_1^2 + b_1^2) - a_2 b_1 (AB) + a_1 b_2 (AB)$

$\Rightarrow 2 a_1 b_1 (a_2^2 + b_2^2) - 2 a_2 b_2 (a_1^2 + b_1^2) = 2h'$ [3]

[1] x^2 + [3] xy + [2] $y^2 = 0$ $\Rightarrow$ satisfying $\frac{x^2 - y^2}{[1] - [2]} = 2 \frac{xy}{[3]}$

[3] x^2 − [3] y^2 = 2([1] − [2]) xy i.e

[3] x^2 + 2([2] − [1]) xy − [3] $y^2 = 0$

what is number ? what is meanthy addition and multiplication ?

A number is a relative measure from a standard point in a particular length, and each point is at the same length from the preceding point

& the length between the origin point and any following point is represented by a symbole to indicate how many interval was taken to reach the meant point .

what is meant by addition, is the complete intervals from the origing point to P_2 and the from P_2 to P_3

where the intervals between P_0 to $P_1 = x$ & the intervals from P_2 to $P_3 = y$ ∴ the complete then the interval from the P_0 to P_3 is symbolised by $x + y = z$

when we mean a number we define it by intervals

+ what we mean by multiplication is the complete number of intervals that result from the accumulations of n_1 for a certain number of times x

$n_1 + n_1 + n_1 + \ldots$ ___ x times $= x \cdot n_1 =$

the number 0 we mean by it no interval.

what we mean by $a + x = 0$ "for any number a" is the deaccumulation of the intervals that are equal to

$a = x$

then $a + x = 0$ is represented by $a + (-a) = 0$

where $-a$ represents the deaccumulation of a intervals.

(1) (2) (3) (4) (5) (6)
a-3, b-3, c-3, d-3, e-3, f-3

4 out of 6

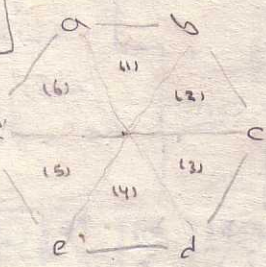
To distribute the (4) Chosen teams among the (4) winners ⇒

(1) ∀ $g_i \in G$ ⇒ where $|g_i| = 4$

at least it will contain a 3rd team from one of these sets C, D, E.

For we have 6 3rd's and we want 4 only, and as shown from the group G that

the group of the 3rd's of each set



ec fd ba

(1,2,3), (1,3,4), (1,3,5), (1,2,6)
(2,3,4), (2,3,5), (2,3,6), (2,4,5)
(3,4,5), (3,4,6), (3,5,6), (2,4,6)
(4,5,6), (4,5,5), (4,5,2), (4,6,1)
(5,6,1), (5,6,2), (5,6,3), (5,6,4)
(6,5,4) (6,5,3), (6,5,2), (6,5,1)

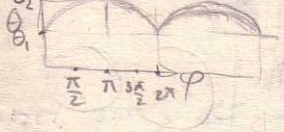
(1,2); (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,1) (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6)
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)

5×3 = 15
Possibility

(a,b) ≅ (b,a)
i.e the pair is interchangible

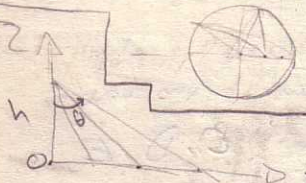
(a,b,c,d) ; (a,b,d,e) ; (a,b,e,h) ;
(b,c,d,e) ; (b,c,e,h) ; (b,c,f,a)
(c,d,e,h) ; (c,d,f,a) ; (d,e,h,a)

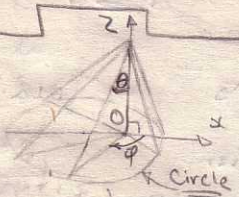
$\equiv G$

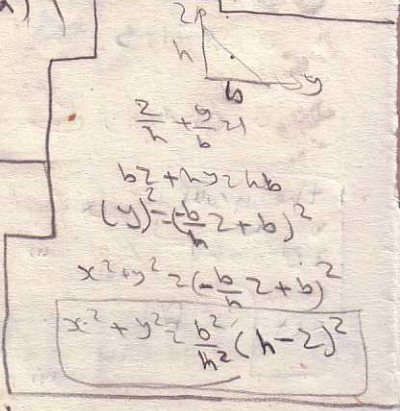


$\theta_0 = a_0$

$\varphi = a_0$







$\frac{z}{h} + \frac{y}{b} = 1$

$bz + hy = hb$

$(y)^2 = (-\frac{b}{h}z + b)^2$

$x^2 + y^2 = (-\frac{b}{h}z + b)^2$

$x^2 + y^2 = \frac{b^2}{h^2}(h-z)^2$

$\frac{x}{h\tan\theta} + \frac{z}{h} = 1$ $\quad b = h\tan\theta$

$\frac{x}{\tan\theta} = h - z \Rightarrow x = \tan\theta(h-z)$

$x^2 + y^2 = \tan^2\theta(h-z)^2$

$\frac{b_1}{h} \leq \tan\theta \leq \frac{b_2}{h}$

$b = h\tan\theta$

$x = b\cos\varphi$ $\quad y = b\sin\varphi$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi]$

$y = h\tan\theta\sin\varphi$ $\quad x = h\tan\theta\cos\varphi$

$x^2 + h^2\tan^2\theta\sin^2\varphi = \tan^2\theta(h-z)^2$

given $z \Rightarrow$ for some θ and φ we can find

$\Rightarrow x \equiv$ function of (z, θ, φ)

$x^2 = \tan^2\theta[(h-z)^2 - h^2\sin^2\varphi]$

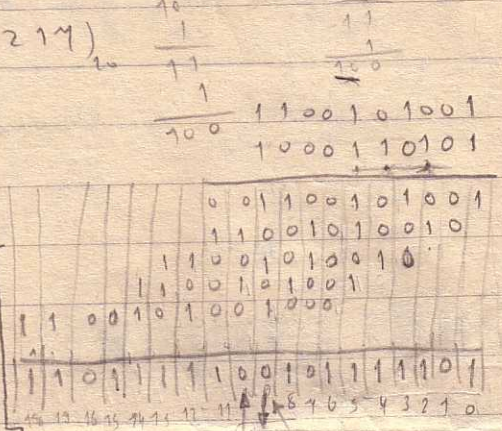
We want for some θ we have only one φ indirectly dependent on θ $\cdot$ s.t we obtain only one distinct Cone.

1100101001
1000110101
1101001011

$(100010101001)_2 = (2217)_{10}$

A	B	C	D	E	F
10	11	12	13	14	15

Look



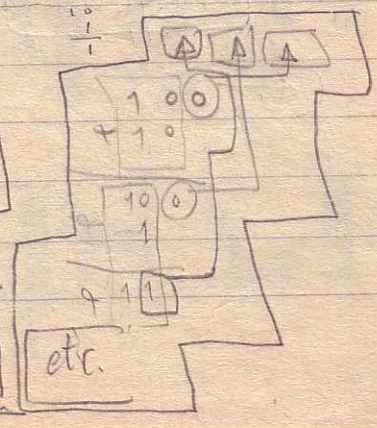
Binary multiplication is done and the diffrence between the resulting number and the multiples of the system we deal with is transfered, the remainder is put

329
235
FCD
97B
652
$(6F97D)_{16} = (457085)_{10}$

1451
1065
7715
11366
14510
$(15774575)_8 = (457085)_{10}$

(16) is always transfered to the other Column

we always transfere (8) to the other Column



A	B	C	D	E	F
10	11	12	13	14	15

$(11001001001)_2$; $(1000110101)_2$; $(1101001011)_2$

$(809)_{10}$; $(565)_{10}$; $(843)_{10}$

$(1451)_8$; $(1065)_8$; $(1513)_8$

$(329)_{16}$; $(235)_{16}$; $(34B)_{16}$

$(0.1110)_2$

$\rightarrow (0.875)_{10} \Rightarrow 0.875 \times 8 = 7 + 0 \times 2^{-1}$ (we write the integer part)

(we prefer)

0.875×8

$\rightarrow (0.7)_8$

0.875×16

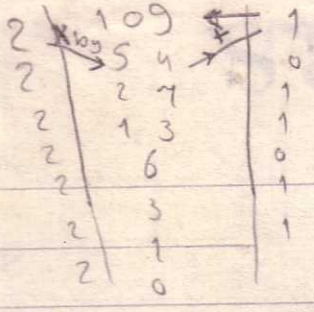
$(0.14)_{16}$

or 0.875×16

the same thing is applied

the remaining fraction

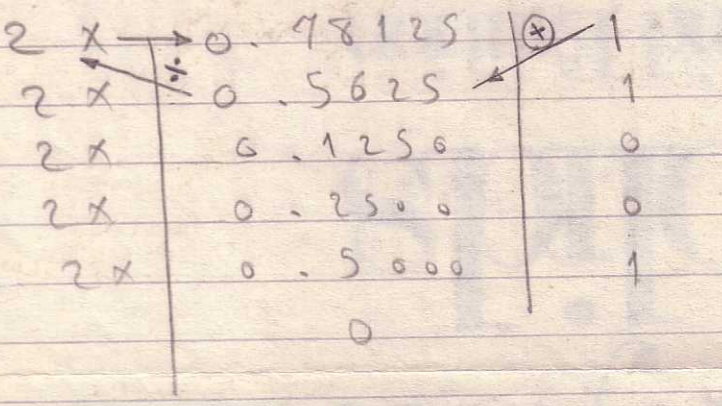
this is a special case where = 0



$1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + \dots$

Least order

2 x number + remainder = the preceeding number



$1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5}$

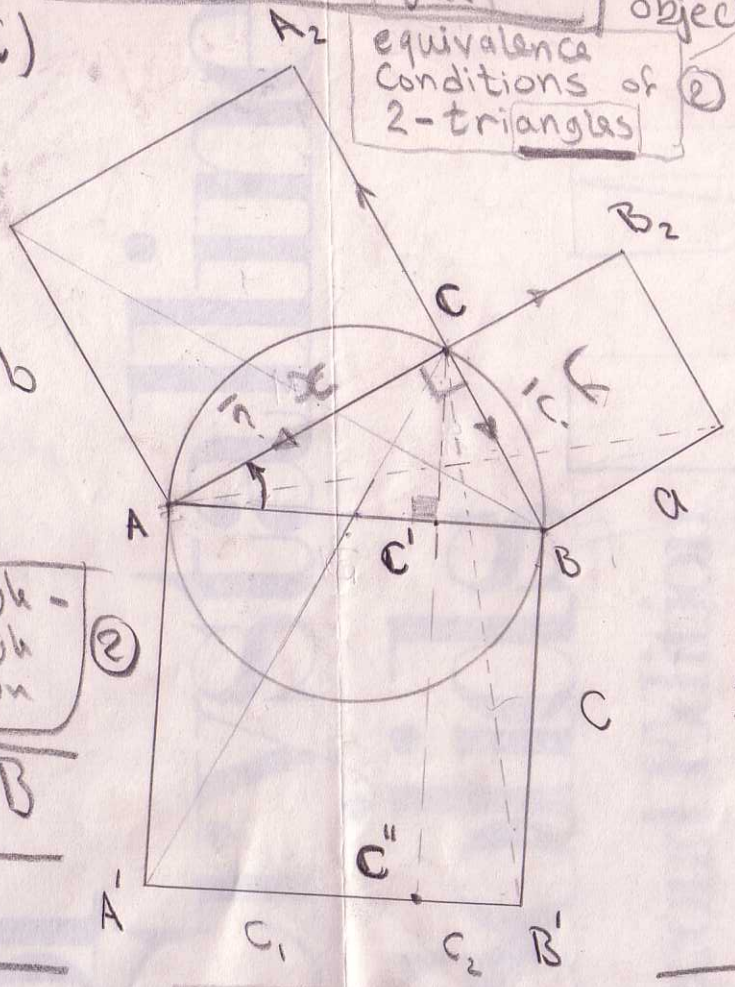
highest order

(remainder + number) $\times 2^{-1}$ = the preceeding number

Square partition into 2-rectangles ①

object

equivalence conditions of ② 2-triangles



$\square ABB'A = C^2$

$(\square A'C''C'A = C_1C)$

$+$

$(\square B'C''C'B = C_2C)$

$\Delta A'AC =$

$\frac{1}{2}(C_1C)$

$\Delta AA_1B =$

$\frac{1}{2}(b^2)$

triangle - rectangle relation ②

$\Delta A'AC = \Delta AA_1B$

$\therefore C_1C = b^2$

equivalent triangles conditions relation ③

$\Delta BB'C =$

$\frac{1}{2}(CC_2)$

$\Delta BB_1A =$

$\frac{1}{2}(a^2)$

$\Delta BB'C =$

ΔBB_1A

$\therefore C_2C = a^2$

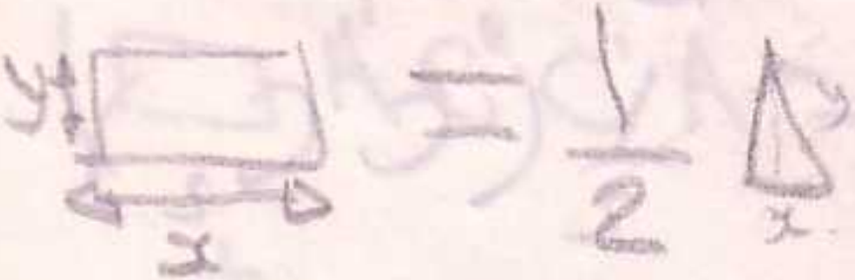
$\therefore C^2 =$

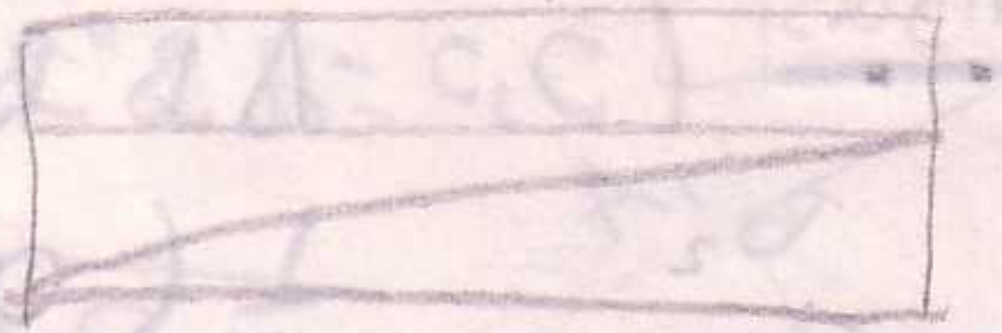
$C_1C + C_2C =$

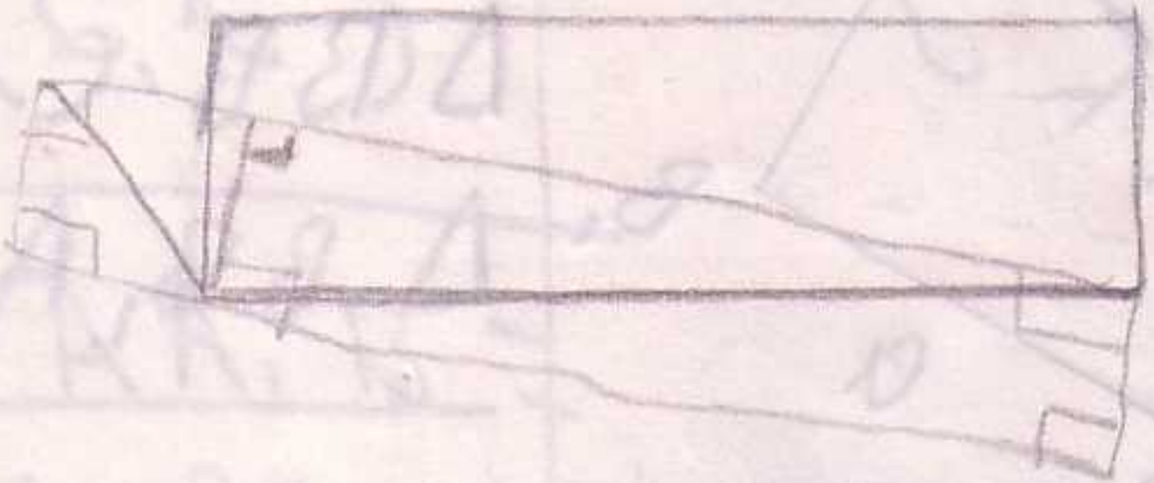
$b^2 + a^2$

$\therefore C^2 = b^2 + a^2$

Angle


y
x
=
1
2
y
x





In the $\mathbb{R}^2$ Plane:

Given the
1. distance / length of a line segment $AB = x$
2. length of a line segment $AC = y$
3. the angle (BCA) between them $= \alpha$

.1 What is (the length of the line segment $BC = Z$)

$f^n : | \; | \sim \Delta Z$

$f^n : \sqrt{\;} \sim Z$ (length) and area

.2

1. Assume:

what / how / why

Any of x, y or α has been changed / (varied).

2. What is the length of the line segment BC, after the change / or variation has happened?

3. Is there a difference between the value BC in (.1) and the value BC in (.2 2.)

.3 Conclusion:

1. Does the variation of any of x, y or α causes a change of the value of Z? (Yes or No)

Linear Vector space ↦ independence, bases ↦ differential Calculus, Mathematical Analysis, Geometry

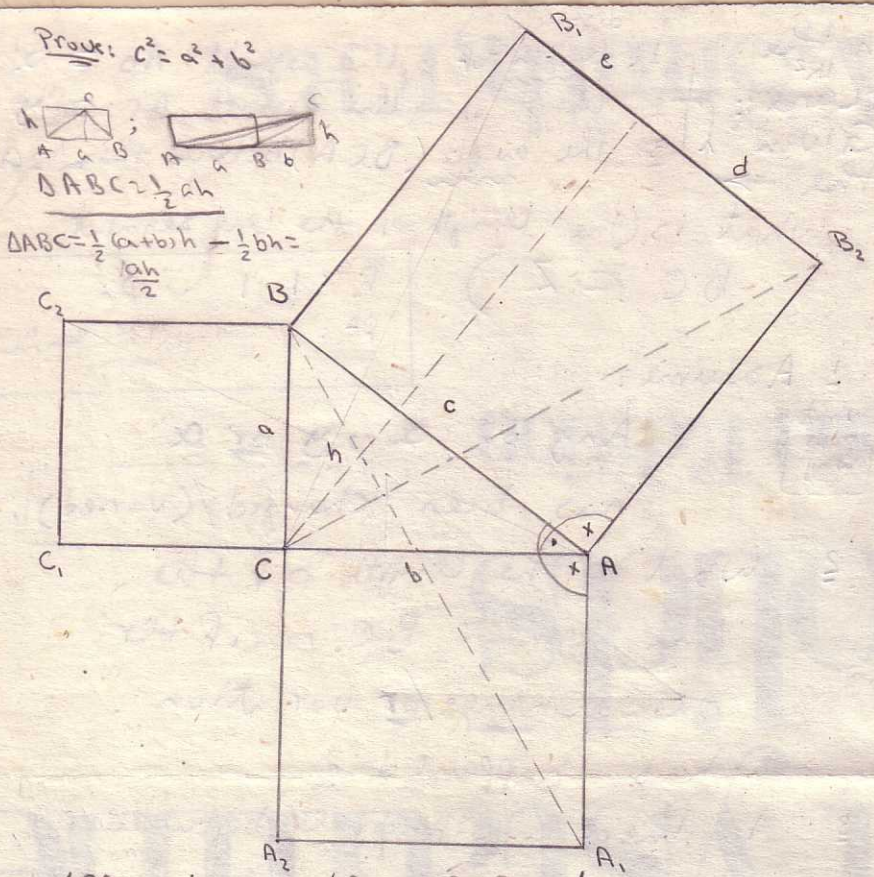
2. Thus Z depends on the variations happened to x, y or α ↦

3. $Z = Z(x, y, \alpha)$, how to calculate Z?

Prove: $c^2 = a^2 + b^2$

$\Delta ABC = \frac{1}{2} ah$

$\Delta ABC = \frac{1}{2}(a+b)h - \frac{1}{2}bh = \frac{ah}{2}$



$\angle BAC + \angle CAA_1 = \angle BAC + BAB_1 = \angle$

Also, ΔBAA_1 and B_2AC have

(1) $BA = B_2A$

(2) $AA_1 = AC$

(3) $\angle CAB_2 = \angle A_1AB$

$\Delta\Delta$ are $\Rightarrow$ Congruent to each other

But, $\Delta B_2AC = \frac{1}{2} dC \equiv$ area of the rectangle ①

$\Delta A_1AB = \frac{1}{2} b^2 \equiv$ area of the Square ②

$\Rightarrow$ ① = ②. Similarly we can Prove that

area of square CC_1C_2B = area of rectangle eC

$\Rightarrow$ area of Square $C^2 = eC + dC = C^2 = a^2 + b^2$

• 1) $|A| = |A^T|$

× 2) The value of $|A|$ can be found through its rows or columns.

✓ 3) $[|A| = 0]$ when the elements of 2 row or 2 columns equalize."

• 4) $|A| = -|A'|$ by interchanging 2 rows or 2 columns.

✓ 5) we can take a common factor out of a row or a column.

✓ 6) in $|A|$ if the elements of a row or a column = 0 the $|A| = 0$

7) $$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

" (C) Columns are dealt with in the same way as rows (R) "

• 8) The addition of multiples of (R) or (C) to another (R) or (C) doesn't change the value of $|A|$.

✓ 9) the multiplication of element of a (R) or a (C) by the cofactors of another (R) or (C) makes the value of the determenat = 0

× 10) $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$$

N.B we can multiply the element of a (R) or a (C) by "K" and the value of $|A'| = K|A|$. (rule 5)

the resulting determenant

To find the reverse of a square matrix we have to

1) find the value of its determenat.
2) find the minors (M_{ij}) of every element.
3) find the cofactor of every minor, where $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
4) putting each (C_{ij}) in the place of the minor determenat gives (A^*)
5) find the transverse of (A^*) ie. $(A^*)^T$
6) find $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^*)^T$.

or 1) find the transverse of the matrix

2) find every minor that corrisponds to every element in the matrix "by its sign".

3) apply $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times (A^*)^T$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_{11}$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_{21}$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_{31}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D}$$

الدالة المميزة (مصفوفة مربعة) $A_{n\times n}$

تعرف كالدالة المميزة للصفوفة $F(\lambda) = f_\lambda(A) = |A_n - \lambda I_n|$ (مصفوفة الوحدة)

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$f(\lambda) = \left| A_3 - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| =$$

(محددة) (مصفوفة) (كثيرة الحدود المميزة)

$$\left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ -1 & -\lambda & 4 \\ 2 & 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ -1 & -\lambda & 4 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

(٣)

بكتابة $f(\lambda)$ في صورة كثيرة الحدود نلاحظ أن درجة المتغير λ هي ٣

بفك المحدد (٣) بالتالي

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

(معادلة من الدرجة الثالثة) ← (المجهول) ← (أكبر) ← (درجة) ← (معادلة)

← قيم جذور الدالة المميزة (القيم الخاصة)

والمعكوس الضارب = [والمحدد ← صفر ← تكن ← تشكل صفر
بالمعادلة المميزة $\lambda = 0$ ← تأخذ بالمعادلة ← ملا ← جذر
وهي هي القيم الذاتية

نظرية كيلي هاملتون

(A) مصفوفة مربعة مصفوفة مربعة متجهة ← لها كثير حدود
وهي تحقق المعادلة

مصفوفة ← $f(A) = \square$ (المصفوفة الصفرية)

← لإيجاد $f(A)$ نجد $f(\lambda)$ ثم ←

مصفوفة الوحدة الثالثة من نفس رتبة المصفوفة

$$\therefore f(A) = aA^3 + bA^2 + cA + dI_3 = \square$$

$$\therefore aA^{-1}A^3 + bA^{-1}A^2 + cA^{-1}A + dA^{-1}I_3 = \square$$

$$\therefore aA^2 + bA + cI_3 + dA^{-1} = \square$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{d}(aA^2 + bA + cI_3)$$

أوجد مجموعة الحل لكل من النظم التالية -

$$2x + y + 3z = 1$$
$$x + 2y - z = 3$$
$$3x - 4y + 5z = 2$$

$$-x + 6y = 4$$
$$x + 3y + 5z = 1$$
$$3x + 2y + z = 4$$

$P_1P_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}(C_1 - C_2)$

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة عين شمس — المادة: جبر وهندسة تحليليه — مايو ١٩٨٩

كليه العلوم — الفرقة: الاولى — الزمن ٣ ساعات

قسم الرياضيات — الشعبة: علوم طبيعيه — مقرر رقم ١٠٢

أجب عن خمسة أسئلة فقط من بينهم السؤال السادس

(١) ا- ضع المقدار

$$\frac{2x^{3/2} - x^{1/2}}{x^{5/2} - 6x^{3/2} + 5x^{1/2}}$$

في صورة كسور جزئيه ثم عبر عنه بدلالة قوى x علما بانه $x > 0$.

ب- أوجد جذور المعادلة

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

جـ- باستخدام طريقة الكلمات أوجد الفرق

$$101101 - 10011$$

---

(٢) ا- ضع الرقم $(100111)_2$ في نظامه العشري مستخدما في ذلك طريقة هورنر

ب- أوجد مجموع المتسلسلة اللانهائيه

$$\frac{1}{1\times5} + \frac{1}{5\times9} + \frac{1}{9\times13} + \cdots$$

جـ- أوجد معادلة الدائرة التي تتعامد مع الدائرتين

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 2 = 0 \quad \& \quad x^2 + y^2 - 4x + 5y - 6 = 0$$

وتمر بالنقطة $(1,1)$.

---

(٣) ا- أوجد الحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستوى القطع المكافئ $y^2 = 4ax$ بحيث يكون المماسان المرسومان منها لهذا القطع يحصران بينهما زاوية $\frac{\pi}{4}$.

ب- أوجد قطب الخط المستقيم

$$2x + 3y - 1 = 0$$

بالنسبه للقطع

$$4x^2 + 6y^2 - 2x + 5y - 1 = 0$$

---

(٤) ا- أوجد موجه الحل لمجموعة المعادلات الخطيه التاليه وذلك بطريقة كيلي - هاميلتون

$$3x + 2y + z = 3 \quad \& \quad 2x + y + 2z + 2 = 0 \quad ; \quad x + 2y + 3z = -7$$

ب- عبر عن المقدار $\cos^3\theta \sin^4\theta$

بدلالة جيوب تمام مضاعفات الزاوية θ

انظر الخلف

(٥) ا- إثبت أن المعادلة

$$11x^2 + 24xy + 4y^2 - 2x + 16y - 9 = 0$$

تمثل زوج من المستقيمات فأوجدهما .

ب- أوجد شرط تماس المستقيم

$$y = mx + c$$

مع القطع الناقص

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

---

(٦) إدرس مع الرسم منحنى القطع المخروطي

$$11x^2 + 24xy + 4y^2 - 2x + 16y + 11 = 0$$

11 -24 +4 +2 -16 +11

مع تمنياتي لكم
بالنجاح والتوفيق

م.د. منصور